ANALISIS FUNCIONAL 2: TAREA 15

Enseguida X y Y siempre son espacios normados.

1. Sea $T \in \mathcal{L}(X)$. Si $\sigma(T) = \emptyset$, prueba que existe $r > 0$ tal que si $S \in \mathcal{L}(X)$ y $\|S - T\| < r$, entonces $\sigma(S) = \emptyset$.

2. Determina si la inclusión $i : \ell^1 \to \ell^2$ es compacta.

3. Si $K \in K(X, Y)$, prueba que $R(K)$ es separable.

4. Sea $p \in [1, \infty]$, $X := \ell^p$, $\{a_n\} \subset \mathbb{K}$ una sucesión acotada y $T \in \mathcal{L}(X)$ definido por $T\{x_n\} := \{a_n x_n\}$. Si T es compacto, prueba que $a_n \to 0$.

5. Prueba que la convolución en $L^1(\mathbb{R}^n)$ es una operación asociativa.

6. Sea X un espacio de Banach. Si $V \subset X$ es complementable, prueba que existe una proyección P tal que $R(P) = V$.

7. Si $P \in \mathcal{L}(X)$ es una proyección, encuentra $\sigma(P)$.

8. Sea $X := \ell^1$ y considera $T(x_1, \ldots, x_n, \ldots) := (x_1, \ldots, \frac{x_n}{n}, \ldots)$. Observa que $T \in \mathcal{L}(X)$ y prueba que $\alpha(T) \neq \beta(T')$.

9. Sean X y Y espacios de Banach y $T, S \in \mathcal{L}(X, Y)$. Si $R(T)$ es cerrado y $S \in F(X, Y)$, prueba que $R(T + S)$ es cerrado.

10. Sean X, Y y Z espacios de Banach. Si $S \in \Phi^+(X, Y)$ y $T \in \Phi^+(Y, Z)$, prueba que $ST \in \Phi^+(X, Z)$. (Sug.: Considera las descomposiciones $X = N(T) \oplus V_T$ y $Y = N(S) \oplus W_S$.)

11. Sea $T \in \mathcal{L}(X)$ y V un subespacio de X. Si V es invariante bajo T, prueba que $V^\perp \subset X^*$ lo es bajo T'.

Para entregar y revisarse el viernes 22 de mayo, 2015