ANALISIS FUNCIONAL 2: TAREA 16

Enseguida X y Y siempre son espacios normados.

1. Sea $T \in \mathcal{L}(X)$. Si $r_s(T) < 1$, prueba que $I - T \in \mathcal{G}(\mathcal{L}(X))$. (Compara este resultado con el de la serie de Neumann.)

2. Supongamos que Y es completo. Si $\dim Y = \infty$, prueba que el espacio $F(X,Y) \subset \mathcal{L}(X,Y)$ no es cerrado.

Definición Sea H un espacio de Hilbert separable. Un operador $T \in \mathcal{L}(H)$ es de *Hilbert-Schmidt*, si H tiene una base ortonormal $\{e_n : n \in N\}$ tal que $\sum_{n\in N} \|Te_n\|^2 < \infty$.

3. Sea H un espacio de Hilbert. Si $T \in \mathcal{L}(H)$ es un operador de Hilbert-Schmidt, prueba que T es compacto.

4. (Continuacion del ejercicio 14.8) Sea $1 \leq p < \infty$. Prueba que el operador transpuesto de $T : L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$ también es un operador integral y senãla su núcleo.

5. Prueba que la convolución en $L^1(\mathbb{R}^n)$ es una operación conmutativa.

6. Muestra que puede suceder que $X = V \dot{+} W$ sin que V o W sea cerrado. (Sug.: considera el ejercicio 3.9.)

7. Sea X un espacio de Banach. Si $T \in F(X)$, prueba que $\sigma(F)$ es finito.

8. Sea $T : X \to Y$ un operador lineal. Si $X = V \dot{+} W$ y T es 1-1 en W, prueba que $\alpha(T) \leq \dim V$.

9. Sea $T \in \Phi(X)$. Si $\operatorname{ind}(T) = 0$, prueba que existe un operador invertible $S \in \mathcal{L}(X)$ y $K \in F(X)$ tal que $T = S + K$.

10. Sean X, Y y Z espacios de Banach y $T \in \mathcal{L}(X,Y), S \in \mathcal{L}(Y,Z)$. Si $ST \in \Phi^+(X,Z)$, prueba que $T \in \Phi^+(X,Y)$.

11. Supongamos que $\dim X \geq 2$. Sea $T \in \mathcal{L}(X)$ tal que $T'\varphi = \lambda\varphi$, para algún $\lambda \in \mathbb{K}$ y $\varphi \in X^* \setminus \{0\}$. Prueba que $N(\varphi)$ es un subespacio de T que es propio e invariante bajo $\operatorname{Conm}(T)$.

Para revisar y entregarse el viernes 29 de mayo, 2015