**ANALISIS FUNCIONAL 3: TAREA 1**

Enseguida $H$ y $Y$ siempre son espacios de Hilbert.

1. Sea $\Omega$ un conjunto arbitrario. Si $h : \Omega \to \Omega$ es una biyección, prueba que $f(A)^c = f(A^c),\ \forall\, A \subset \Omega$.

2. Si $P \in \mathcal{L}(H)$ es una proyección y $\|P\| = 1$, prueba que $P$ es una proyección ortogonal.

3. Sea $H$ un espacio pre-Hilbert real y definamos en su complejificación $H_{\mathbb{C}}$ la función $\langle x+iy, u+iv\rangle_{\mathbb{C}} := \langle x, u\rangle + \langle y, v\rangle + i(\langle y, u\rangle - \langle x, v\rangle,\ \forall\, x, y, u, v \in H$. Prueba que $\langle \cdot, \cdot\rangle_{\mathbb{C}}$ es un producto escalar en $H_{\mathbb{C}}$.

4. Prueba: i) $T^* \in \mathcal{L}(Y, H)$ y $\|T\| = \|T^*\|,\ \forall\, T \in \mathcal{L}(H, Y)$.
ii) $(S + T)^* = S^* + T^*,\ (\lambda T)^* = \overline{\lambda} T^*, \forall\, S, T \in \mathcal{L}(H, Y), \lambda \in \mathbb{K}$.

5. Sean $T \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ y $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base ortonormal de $\mathbb{C}^n$. Si $A = (a_{i,j})$ es la matriz de $T$ respecto de $\mathcal{B}$, prueba que la matriz de $T^*$ respecto de esa misma base es $B = (b_{i,j})$, donde $b_{i,j} = \overline{a_{j,i}}$.

**Definición** Un operador $T \in \mathcal{L}(H)$ es de *Hilbert-Schmidt*, si $H$ tiene una base ortonormal $\{e_n : n \in N\}$ tal que $\sum_{n\in N} \|Te_n\|^2 < \infty$.

6. Si $T \in \mathcal{L}(H)$ es un operador de Hilbert-Schmidt, prueba que $T^*$ también.

7. Sean $H$ y $Y$ espacios de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(H, Y)$. Prueba:
i) $R(T)^\perp = N(T^*)$. Luego, $R(T) \subset Y$ es denso si, y sólo si, $T^*$ es 1-1.
ii) $\overline{R(T)} = N(T^*)^\perp$.

**Definición** El radio espectral de $T \in \mathcal{L}(H)$ es $r_\sigma(T) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$ si $\sigma(T) \neq \emptyset$ y $r_\sigma(T) = \{0\}$ cuando $\sigma(T) = \emptyset$.

8. Prueba que $r_\sigma(T) = r_\sigma(T^*),\ \forall\, T \in \mathcal{L}(H)$.

9. Prueba la desigualdad de Schwarz para un forma positiva.

10. Sea $K \in \mathcal{L}(H), \{x_n\} \subset H$ y $x \in H$. Si $K$ es compacto y $x_n \xrightarrow{w} x$, prueba que $\langle Kx_n, x_n\rangle \to \langle Kx, x\rangle$.

11. Si $T \in \mathcal{L}(H)$ es normal y $T^n = 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$, prueba que $T = 0$.

Para revisar y entregarse el viernes 21 de agosto, 2015