ANALISIS FUNCIONAL 3: TAREA 2

Enseguida H y Y siempre son espacios de Hilbert.

1. Sea $T \in \mathcal{L}(H)$. Prueba que $R(T)$ es cerrado si, y sólo si, $R(T^*)$ es cerrado.

Definición Dados $u, v \in H$, definimos $u \otimes v : H \to \mathbb{K}$ por $(u \otimes v)x := \langle x, v \rangle u$.
2. Sean $u, v \in H$.
i) Verifica que $u \otimes v \in \mathcal{L}(H)$.
Determina cómo deben ser u y v para que:
ii) $u \otimes v$ sea una proyección. iii) $u \otimes v$ sea una proyección ortogonal.

3. Sea H un espacio de Hilbert real. Si $T \in \mathcal{L}(H)$, prueba que $(T_{\mathbb{C}})^* = (T^*)_{\mathbb{C}}$.

4. Sean H, Y y Z espacios de Hilbert. Prueba:
i) $(ST)^* = T^* S^*, \ \forall\, T \in \mathcal{L}(H, Y), S \in \mathcal{L}(Y, Z)$.
ii) $T^{**} = T, \ \forall\, T \in \mathcal{L}(H, Y)$.

5. Sea H un espacio pre-Hilbert complejo. Si $T : H \to H$ es un operador lineal y existe un número real $C > 0$ tal que $|f_T(x)| \leq C, \ \forall\, x \in B_H$, prueba que T es acotado.

6. Sea H un espacio de Hilbert. Si T un es operador de Hilbert-Schmidt y $\{v_n\} \subset H$ es cualquier base ortonormal de H, prueba que $\sum_{n=1}^{\infty} \|Tv_n\|^2 < \infty$.

7. Sean $T \in \mathcal{L}(H)$ y $R(T, \lambda) := (T - \lambda I)^{-1}, \ \forall\, \lambda \in \rho(T)$. Prueba que $R(T, \lambda)^* = R(T^*, \overline{\lambda}), \forall\, \lambda \in \rho(T)$.

8. Sea $T \in \mathcal{L}(H)$. Prueba:
i) $(e^T)^* = e^{T^*}$. Si T es autoadjunto, concluye que e^T también lo es.
ii) Si T es normal, entonces e^T es normal.

9. Determina si el operador de Volterra $V : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$, definido por $Vf(x) := \int_a^x f(y)dy$, es normal.

10. Construye un operador $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ que no sea normal y cuyo espectro sea real. (Sug.: considera el ejercicio 1.11.)

11. Sea $\{v_n : n \in \mathbb{N}\} \subset H$ un sistema ortonormal y $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{R}$ tal que $\lambda \to 0$. Definamos $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, u_n \rangle u_n, \ \forall\, x \in H$. Prueba que T es compacto y autoadjunto.

Para revisar y entregarse el viernes 28 de agosto, 2015