**ANALISIS FUNCIONAL 3: TAREA 3**

Cuando no se indique otra cosa, $H$ es un espacio de Hilbert.

1. Sean $H := \ell^2(\mathbb{C}), s := \{a_n\} \in \ell^\infty(\mathbb{C})$ y $M_s : H \to H$ el operador definido por $M_s(\{b_n\}) := \{a_n b_n\}$. i) Verifica que $(M_s)^* = M_{\overline{s}}$.
ii) Concluye que $M_s$ es autoadjunto si, y sólo si, $s$ es real.

**Observación** Dado un espacio de Banach $X$, $\mathcal{P}(T)$ denota a la subálgebra de $\mathcal{L}(X)$ generada por $\{T, I\}$, donde $I$ es la identidad en $\mathcal{L}(X)$. Entonces $\mathcal{P}(T) = \{P(T) : P \in \mathcal{P}(\mathbb{K})\}$.
2. Encuentra $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ tal que $T^* \notin \mathcal{P}(T)$.

3. Sea $H$ un espacio pre-Hilbert real. Prueba que $H$ es completo si, y sólo si, $H_\mathbb{C}$ lo es.

4. Si $T \in \mathcal{L}(H)$ es compacto y $\lambda \in \sigma_\pi(T) \setminus \{0\}$, prueba que $\overline{\lambda} \in \sigma_\pi(T^*)$.

5. Sea $\{v_n\} \subset H$ tal que $\sum_{n=1}^\infty \|v_n\|^2 < \infty$ y supongamos que $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base ortonormal de $H$. Para cada $v = \sum_{n=1}^\infty a_n e_n \in H$, donde $\{a_n\} \in \ell^2$, definamos $Tv = \sum_{n=1}^\infty a_n v_n$. Prueba que $T$ está bien definido y que es un operador de Hilbert-Schmidt.

6. Supongamos que $\dim H > 1$ y $T \in \mathcal{L}(H)$. Prueba:
i) $W(T)$ es conexo. ii) Si $T$ es autoadjunto, entonces $W(T)$ es un intervalo.

7. Prueba que $I + T^*T$ es invertible, $\forall\, T \in \mathcal{L}(H)$.

**Observación** Si $T \in \mathcal{L}(X)$, entonces $\alpha(T) := \dim N(T)$ y $\beta(T) := \dim X/R(T)$.
8. Si $T \in \mathcal{L}(H)$ es normal y $R(T)$ es cerrado, prueba que $\alpha(T) = \beta(T)$.

9. Muestra que la suma de dos operadores normales puede no ser normal.

10. Sean $M$ y $N$ espacios métricos completos y $D \subset M$ un conjunto denso. Si $J : D \to N$ es una isometría, prueba que su extensión continua es una isometría sobre $\overline{J(D)} \subset N$.

**Definición** Sean $X$ y $Y$ espacios normados, y $V \subset X$ un subespacio vectorial. Un operador lineal $T : V \to Y$ es *cerrado* si $G(T) \subset X \times Y$ es cerrado.
11. Prueba que $T : V \subset X \to Y$ es cerrado si, y sólo si, para cada sucesión $\{x_n\} \subset V$ tal que $x_n \to x \in X,\ Tx_n \to y \in Y$, se cumple que $x \in V,\ y = Tx$.

Para revisar y entregarse el viernes 4 de septiembre, 2015