**ANALISIS FUNCIONAL 3: TAREA 4**

Cuando no se diga otra cosa, $H$ y $Y$ siempre son espacios de Hilbert.

1. Indica operadores autoadjuntos $S, T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, tales que $ST$ no sea normal.

2. Encuentra $H$ y un operador $T \in \mathcal{L}(H)$ tal que $r_\sigma(T) < r(T) < \|T\|$.

3. Sea $T \in \mathcal{L}(H)$ un operador autoadjunto. Si $f$ es holomorfa en $\{z \in \mathbb{K} : |z| < \|T\|\}$, prueba que la nueva definición de $f(T)$ coincide con la original.

4. Sea $H$ un espacio de Hilbert complejo y $T \in \mathcal{L}(H)$ un operador autoadjunto. Si $f(\sigma(T)) \subset \mathbb{R}$, prueba que $f(T)$ es autoadjunto.

5. Sean $S, T \in \mathcal{L}(H)$ operadores autoadjuntos. Si $ST = TS$, prueba que $f(S)g(T) = g(T)f(S)$, $\forall\, f \in C(J_S)$, $g \in C(J_T)$.

6. Supongamos que $\dim H = \infty$, $K \in \mathcal{L}(H)$ es compacto autoadjunto y $f \in C(J_T)$. Prueba que $f(K)$ es compacto si, y sólo si, $f(0) = 0$.

7. Sean $P, Q \in \mathcal{L}(H)$ proyecciones ortogonales. Prueba que $P \leq Q$ si, y sólo si, $PQ = P$.

8. Si $A \subset \mathbb{R}$ es compacto y no-vacío, prueba que $\sup\{|x| : x \in A\} = \max\{|\inf A|, |\sup A|\}$.

9. Encuentra un operador autoadjunto $T \in \mathcal{L}(H)$ para el cual exista $x \in H$ tal que $Tx \neq 0$ y $\langle Tx, x\rangle = 0$.

10. Si $T \in \mathcal{L}(H)$ es autoadjunto, prueba que puede expresarse en la forma $T = T^+ - T^-$, donde $T^+$ y $T^-$ son operadores positivos que satisfacen:
i) $T^+$ y $T^-$ conmutan con cualquier operador que conmuta con $T$.
ii) $T^+T^- = 0$. iii) $T^- \leq T \leq T^+$.

11. Sean $X$ y $Y$ espacios de Banach, $V \subset X$ un subespacio y $T : V \to Y$ un operador lineal. Definamos $\|x\|_T := \|(x, Tx)\|_{X\times Y}$, $\forall\, x \in D$. Prueba:
i) $\|\cdot\|_T$ es una norma en $V$.
ii) Si $Z := (V, \|\cdot\|_T)$, entonces $T : Z \to Y$ es continuo.
iii) $Z$ es completo si, y sólo si, $T$ es cerrado.

Para revisar y entregarse el viernes 11 de septiembre, 2015