ANALISIS FUNCIONAL 3: TAREA 5

Cuando no se indique otra cosa, H y Y son espacios de Hilbert.

1. Sea $T \in \mathcal{L}(H)$. Si $\lambda \in \sigma_\pi(T)$ y P es un polinomio, prueba que $P(\lambda) \in \sigma_\pi(P(T))$.

2. Sea $T \in \mathcal{L}(H)$ un operador autoadjunto. Supongamos que $\sigma(T)$ no es conexo, y expresemos $\sigma(T) = \sigma_1 \cup \sigma_2$, donde $\sigma_j \neq \emptyset$ y σ_j es abierto y cerrado en $\sigma(T)$, $j = 1, 2$.
i) Prueba que $f_j := \chi_{\sigma_j} \in C(\sigma(T))$ y que $P_j := f_j(T)$ es una proyección.
ii) Prueba que $V_j := R(P_j)$ es invariante bajo T, $j = 1, 2$.
iii) Sea $T_j := T : V_j \to V_j$. Prueba que $\sigma(T) = \sigma(T_1) \cup \sigma(T_2)$.

3. Sean $T \in \mathcal{L}(H)$ un operador autoadjunto y $f \in C(\sigma(T))$. Si f toma valores reales y es creciente, prueba que $\|f(T)\| = f(\|T\|)$.

4. Prueba el teorema del mapeo espectral para un operador $T \in \mathcal{L}(H)$ que es compacto y autoadjunto y una función $f \in C(J_T)$

5. Prueba que el *cono positivo* $\mathcal{S}(H)^+ := \{T \in \mathcal{S}(H) : T \geq 0\}$ es cerrado en $\mathcal{S}(H)$.

6. Si $T \in \mathcal{K}(H)$, prueba que la norma de T es la raíz cuadrada del valor propio más grande de T^*T.

7. Sea $T \in \mathcal{L}(H)$. Si $T \geq 0$, prueba que T tiene una única raíz cúbica positiva.

Sea $U \in \mathcal{L}(H, Y)$ una isometría parcial con espacio inicial H_1 y espacio final H_2. Prueba:

8. U^* es una isometría parcial con espacio inicial H_2 y espacio final H_1.

9. Prueba que T es invertible si, y sólo si, $\sqrt{T}$ lo es.

Sea $T \in \mathcal{L}(H, Y)$. Prueba:

10. $|\alpha T| = |\alpha||T|$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{K}$.

11. Sean $H := L^2(0, \infty)$ y $V := \{u \in H : tu \in X\}$. Prueba:
i) $V \neq H$.
ii) $Mu := tu$ define un operador lineal cerrado de V en H.
iii) M no es acotado.

Para revisar y entregarse el jueves 24 de septiembre, 2015