ANALISIS FUNCIONAL 3: TAREA 6

Cuando no se indique otra cosa, H y Y son espacios de Hilbert.

Sea $T \in \mathcal{L}(H, Y)$. Prueba:

1. T es normal, si y sólo si, $|T| = |T^*|$.

2. T es invertible si, y sólo si $|T|$ lo es.

3. T es 1-1 si, y sólo si, $\langle |T|\, x, x\rangle\ > 0,\ \forall\, x \in H, x \neq 0$.

Sea $U \in \mathcal{L}(H, Y)$ una isometría parcial con espacio inicial H_1 y espacio final Y_1. Prueba:

4. U^*U es la proyección ortogonal sobre H_1.

Sea $T \in \mathcal{L}(H, Y)$ y $T = U|T|$ su representación polar. Prueba:

5. T y T^* son 1-1 si, y sólo si, U es un operador unitario.

6. $T^* = U^*TU^*$.

7. Sea $T \in \mathcal{L}(H)$ un operador autoadjunto. Prueba:

i) $v(T) =\ |T|$, donde v es la función valor absoluto.
ii) $\sqrt{T^2} =\ |T|$.
iii) $T \leq |T|$.

8. Sea X un espacio de Banach, $\{S_n\} \subset \mathcal{L}(X)$, $S, T \in \mathcal{L}(X)$. Si $S_n \xrightarrow{s} S$ y $S_nT = TS_n$, prueba que $ST = TS$.

Definición Sea J un intervalo. Una función $f : J \to \mathbb{R}$ es *semicontinua superiormente* en $a \in J$, si para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in J$ y $|x - a| \leq \delta$, entonces $f(x) \leq f(a) + \epsilon$.

9. Si $f \in \mathcal{F}_T^+$, prueba que f es semicontinua superiormente.

10. Sean $f, g : J_T \to \mathbb{R}$. Si $f \in \mathcal{F}_T^r$ y $g = f$ excepto en un número finito de puntos, prueba que $g \in \mathcal{F}_T^r$.

11. Sea X un espacio normado, $V \subset X$ un subespacio, Y un espacio de Banach y $T \in \mathcal{L}(V, Y)$. Prueba que T es cerrado si, y sólo si, V es cerrado.

Para revisar y entregarse el viernes 2 de octubre, 2015