ANALISIS FUNCIONAL 3: TAREA 7

Si no se indica otra cosa, H es un espacio de Hilbert y $S, T \in \mathcal{L}(H)$.

1. Si $0 \leq S \leq T$ y S conmuta con T, prueba que $0 \leq \sqrt{S} \leq \sqrt{T}$.

2. Consideremos $H := \ell^2$ y sea $T \in \mathcal{L}(H)$. Para $x := (a_1, \ldots, a_n \ldots)$, definamos $Tx := (0, a_1, a_2, \ldots)$. Prueba que $|T|$ es invertible y T no lo es.

3. Si S conmuta con T, prueba que $|S+T| \leq |S| + |T|$.

4. Encuentra operadores positivos $S,\ T \in \mathcal{L}(H)$ tales que ST no sea positivo.

5. Sea T un operador autadjunto y $f : J_T \to \mathbb{R}$. Si f es acotada y existe una sucesión $\{f_n\} \subset C(J_T, \mathbb{R})$ tal que $f_n \leq f_{n+1}$ y $f_n \to f$ puntualmente, prueba que $f \in \mathcal{F}_T$.

6. Sean M y N espacios métricos y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas de M en N que converge puntualmente a $f : M \to N$. Para cada $n, k \in \mathbb{N}$, sea $A_{n,k} := \{x \in M : d(f_n(x), f_j(x)) \leq \frac{1}{k},\ j \geq n\}$, $A^0_{n,k}$ su interior y $A = \cup_{n,k \in \mathbb{N}} (A_{n,k} \setminus A^0_{n,k})$.
i) Prueba que f es continua en $x, \forall\, x \in M \setminus A$. (Sug.: Dados $x \in M$ y $k \in \mathbb{N}$, observa que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x \in A_{n,k},\ \forall\, n \geq N$.)
ii) Si M es completo, concluye que f es continua en un subconjunto denso.

7. Sea $M : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ el operador lineal definido por $Mh(t) := th(t),\ \forall\, t \in (0,1)$. Prueba:
i) $\underline{m} = 0,\ \overline{m} = 1$.
ii) La resolución de la identidad $\{E_\lambda : 0 \leq \lambda \leq 1\}$ correspondiente a M está dada por $E_\lambda(f) := \chi_{[0,\lambda]} f$.

8. Sea $T \in \mathcal{L}(H)$ autoadjunto. Si $\lambda \in \sigma(T)$ es un punto aislado, prueba que $\lambda \in \sigma_\pi(T)$.

Definición Dados $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b,$, denotemos por $\Pi[a,b]$ la colección formada por las particiones de $[a,b]$. Para $P \in \Pi[a,b]$, $P : a = x_0 \leq \ldots, \leq x_n = b$, sea $V_P := \sum_{j=0}^{n-1} |f(x_{j+1}) - f(x_j)|$. La función f es de *variación acotada* si

$$V_a^b(f) \ := \ \sup\{V_P(f) : P \in \pi[a,b]\} < \infty.$$

Denotemos por $BV[a,b]$ el conjunto de funciones $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ que son de variación acotada y para $f \in BV[a,b]$ definamos $\|f\|_{BV} := V_a^b(f)$.

9. Prueba: i) $\|\cdot\|_{BV}$ es una seminorma en el espacio vectorial $BV[a, b]$.
ii) $\|\cdot\|_{BV}$ es una norma en $BV_0[a, b] := \{f \in BV[a, b] : f(0) = 0\}$.
iii) $BV_0[a, b]$ es completo.

10. Sean X y Y espacios normados y $V \subset X$ un subespacio. Si $T : V \to Y$ es cerrado, prueba: i) $T^{-1}(K) \subset X$ es cerrado, para cada compacto $K \subset Y$.
ii) $N(T) \subset X$ es cerrado.

Para revisar y entregarse el viernes 9 de octubre, 2015