ANALISIS FUNCIONAL 3: TAREA 8

Si no se indica otra cosa, H es un espacio de Hilbert y $S, T \in \mathcal{L}(H)$.

1. Sean $S, T \in \mathcal{L}(H)$ operadores positivos. Prueba que $S \leq T$ si, y sólo si, $\|\sqrt{S}\| \leq \|\sqrt{T}\|$.

2. Si $T \geq 0$ prueba que la función $f(\lambda) := \sqrt{T + \lambda I},\ 0 \leq \lambda$ es continua.

3. Si $\underline{m} < \overline{m}$, encuentra una función $f \in L^\infty(J_T) \notin \mathcal{F}_T$.

Si S y T son operadores autoadjuntos y $ST = TS$, prueba:

4. $|ST| = |S||T|$.

5. $|S + T| \leq |S| + |T|$.

Definición Sean T un operador autoadjunto y $\{E_\lambda\}$ su resolución de la identidad. Para cada $x, y \in H$, definimos la función

$$\alpha(x, y; \lambda) \ := \ \langle E_\lambda x, y\rangle,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Asímismo, $\alpha(x; \cdot) := \alpha(x, x; \lambda)$.

6. Prueba que, para cada $x, y \in H$, la función $\alpha(x, y; \cdot)$ es continua por la derecha y de variación acotada. Además:

i) $\alpha(x, y; \lambda) \ = \ 0,\ \forall\, \lambda \in (-\infty, \underline{m})$. Por lo tanto, $\alpha(x, y; \underline{m}^{-0}) \ = \ 0$.

ii) $\alpha(x, y; \lambda) \ = \ \langle x, y\rangle,\ \forall\, \lambda \in [\overline{m}, \infty)$.

iii) $\alpha(x; \cdot)$ es no-negativa y monótona-creciente.

7. Sea X un espacio normado. Prueba que $\{T \in \mathcal{L}(X) : \dim R(T) < \infty\}$ es un ideal.

8. Sea A un álgebra normada. Si $M \subset A$ es un ideal, prueba que $\overline{M}$ también.

9. Sea H un espacio de Hilbert separable. Si $M \subset \mathcal{L}(H)$ es un ideal y $T \in M$, prueba que $T^*,\ |T|\ \in M$.

10. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Para cada $x \in [a, b]$ sea $\delta_x := \chi_{\{x\}}$. Prueba:

i) $\delta_x \in BV[a, b],\ \forall\, x \in [a, b]$.

ii) Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$. Si $f \in V[a, b]$ y $g = f$ excepto en un número finito de puntos, entonces $g \in BV[a, b]$.

11. Sean X y Y espacios normados, $V \subset X$ un subespacio y $T : V \to Y$ un operador lineal cerrado. Si Y es completo y $S \in \mathcal{L}(V, Y)$, prueba que $S + T : V \to Y$ es cerrado.

Para revisar y entregarse el viernes 16 de octubre, 2015