ANALISIS FUNCIONAL 3: TAREA 9

Cuando no se indique otra cosa, H y Y son espacios de Hilbert.

1. Sean $T, K \in \mathcal{L}(H)$. Si $0 \leq T \leq K$ y K es compacto, prueba que T es compacto.

Definición Dados operadores autoadjuntos $S, T \in \mathcal{L}(H)$, definamos

$$S \vee T := \frac{S + T + |S - T|}{2}.$$

2. Prueba:

i) $S \vee T = T \vee S$.

ii) $S \vee T \geq T$ y $S \vee T \geq S$.

iii) Si $L \geq T$ y $L \geq S$ y L, S, T conmutan entre sí, entonces $L \geq S \vee T$.

Definición Sea V un espacio espacio vectorial real. Un conjunto no-vacío $C \subset V$ es un *cono*, si $x + y \in C,\ \forall\, x, y \in C$ y $cx \in C, \forall\, x \in C$ y $c \geq 0$.

3. Sean V y W espacios vectoriales, $C \subset V$ un cono y $T : C \to W$.

i) Describe el espacio vectorial generado por C.

ii) Si $T(x + y) = Tx + Ty, T(cx) = cTx,\ \forall\, x, y \in C, c \geq 0$, prueba que T puede extenderse linealmente de manera única al espacio generado por C.

A continuación $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función monótona-creciente.

4. Prueba que el conjunto de discontinuidades de α es numerable.

5. Si $\beta(x) := \alpha(x^+),\ \forall\, x \in [a, b]$. Prueba que β es continua por la derecha.

6. Sean $p \in [a, b]$ y δ_p la función característica de $\{p\}$ en $[a, b]$. Prueba que α es continua en p si, y sólo si, $\delta_p \in R(\alpha)$. En esta situación $\int_a^b \delta_p \, d\alpha = 0$.

7. Prueba que $R(\alpha)$, con la norma del supremo, es un espacio de Banach.

8. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{C}$. Prueba que f es de variación acotada si, y sólo si, $\mathrm{Re} f$ e $\mathrm{Im} f$ lo son.

9. Si $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ es (Lebesgue) integrable, prueba que la función F definida por $F(x) := \int_a^x f(s) ds,\ a \leq x \leq b$, es de variación acotada.

10. Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones acotadas. Supongamos que $f \in BV[a, b]$ y $g = f$ excepto en un conjunto contable de puntos. Determina si $g \in BV[a, b]$.

11. Sean X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $T : V \to Y$ un operador lineal cerrado. Si T es 1-1 y T^{-1} es acotado, prueba que $R(T)$ es cerrado.

Para revisar y entregarse el viernes 30 de octubre, 2015