ANALISIS FUNCIONAL 3: TAREA 10

Cuando no indique otra cosa, $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ son funciones acotadas y $\alpha, \beta : [a, b] \to \mathbb{R}$ son funciones monótonas crecientes.

1. Si f es monótona y α es continua, prueba que $f \in R(\alpha)$.

2. Prueba que $U(f; \alpha + \beta) = U(f; \alpha) + U(f; \beta)$.

3. Señala un ejemplo donde $f \in R(\alpha),\ g = f$ excepto en un punto y $g \notin R(\alpha)$.

4. Muestra que puede ocurrir que $\ell\text{-}\int_a^b (f + g)dx < \ell\text{-}\int_a^b f dx + \ell\text{-}\int_a^b g dx$.

5. Señala una función monótona creciente α para la cual no se cumpla el teorema de la integral como límite ($U(P_n, f) \to \int_a^b f d\alpha$).

6. Si $g \in BV([a, b], \mathbb{C})$, prueba:
i) El conjunto de sus discontinuidades es numerable.
ii) En cada $x \in [a, b]$ existen los límites laterales $\gamma(x^-)$ y $\gamma(x^+)$.

7. Dada $\gamma \in BV([a, b], \mathbb{C})$, definamos $\gamma^+(x) := \gamma(x^+),\ \forall\, x \in [a, b]$. Prueba:
i) $\gamma^+ \in BV([a, b], \mathbb{C}),\ \forall\, \gamma \in BV([a, b], \mathbb{C}$.
ii) $T(\gamma) := \gamma^+$ define un operador lineal acotado de $BV([a, b], \mathbb{C})$ en sí mismo.

Defi Sea A un conjunto no vacío y $V, W \subset F(A, \mathbb{R})$. Dada $B : V \times W \to \mathbb{R}$ definamos $B_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \times W_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ por

$$B_{\mathbb{C}}(f_1 + if_2, g_1 + ig_2) := B(f_1, g_1) - B(f_2, g_2) + iB(f_1, g_2) + iB(f_2, g_1).$$

8. Si B es bilineal sobre $\mathbb{R}$, prueba que $B_{\mathbb{C}}$ es bilineal sobre $\mathbb{C}$.

9. Sean $T \in \mathcal{L}(H)$ un operador autoadjunto y $\{E_\lambda\}$ su resolución de la identidad. Para cada $x, y \in H$, consideremos la función de variación acotada $\alpha(x, y; \cdot)$. Si $f \in C(J_T)$, prueba:

i) $$\left\langle \left(\int_{\underline{m}}^{\overline{m}} f(\lambda) dE_\lambda \right) x, y \right\rangle = \int_{\underline{m}-0}^{\overline{m}} f(\lambda) d\alpha(x, y; \lambda),\ \forall\, x, y \in H.$$

ii) $\|f(T)x\|^2 = \int_{\underline{m}}^{\overline{m}} f(\lambda)^2 d\alpha(x; \lambda),\ \forall\, x \in H$.

10. Prueba la aditividad respecto al intervalo de integración de la integral $\int_a^b f d\gamma$ en el caso en que $f \in C([a, b], \mathbb{C})$ y $\gamma \in BV([a, b], \mathbb{C})$.

Definición Sea X un espacio de Banach, $V \subset X$ un subespacio y $T : V \to X$ un operador lineal cerrado. Diremos que $\lambda \in \mathbb{K}$ es un *valor regular* de T, si $T - \lambda I : V \to X$ es un isomorfismo. A la colección de tales λ se le llamará el conjunto resolvente de T y se designará por $\rho(T)$. El *espectro* de T es entonces $\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \rho(T)$.

11. Sea M el operador considerado en el ejercicio 5.11.

i) Encuentra $\sigma(M)$.

ii) Compara el resultado anterior con lo que ocurre cuando M es acotado.

Para revisar y entregarse el viernes 6 de noviembre, 2015