ANALISIS FUNCIONAL 3: TAREA 11

Cuando no indique otra cosa, $f, g : [a, b] \to \mathbb{K}$ son funciones acotadas y $\alpha, \beta : [a, b] \to \mathbb{R}$ son funciones monótonas crecientes.

1. Dada $f \in C[a, b]$ definamos $F(x) := \int_a^x f d\alpha,\ \forall\, x \in (a, b)$. Determina si F siempre es continua.

2. Prueba que $C[a, b]$ siempre está contenido propiamente en $R(\alpha)$.

3. Si $\gamma \in BV([a, b], \mathbb{C})$ y γ es continua, prueba que su función de variación v_γ es continua.

Definición Un espacio vectorial V con un orden parcial $\leq$, es un *espacio vectorial ordenado*, si el orden es compatible con las operaciones vectoriales, esto es, si $x, y \in V$, entonces:

a) $x \leq y$ implica que $x + z \leq y + z, \forall\, z \in V$.

b) $cx \leq cy,\ \forall\, c \geq 0$.

4. Sea V un espacio vectorial. Dado un un cono $\mathcal{C} \subset V$, definamos $x \leq y$ si $y - x \in V$. Prueba que de esta forma V es un espacio vectorial ordenado.

Definición Una función f es Riemann-Stieltjes integrable (R-S integrable), si existe $L \in \mathbb{K}$ tal que para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de manera que $|S(f, P, T, \alpha) - L| \leq \epsilon$, si $P \in \Pi[a, b]$, $|P| \leq \delta$ y T es cualquier conjunto P-admisible.

5. Si f es R-S integrable, prueba que $f \in R(\alpha)$.

6. Sean $\alpha := \chi_{[\frac{1}{2},1]}$ y $f := \chi_{(\frac{1}{2},1]}$.

i) Prueba que $f \in R(\alpha)$.

ii) Encuentra $\{P_n\} \subset \Pi[a, b]$ tal que $|P_n| \to 0$ y $\{L(f, P_n, \alpha)\}$ no converge a $\int_0^1 f d\alpha$.

7. Si $g \in BV([a, b], \mathbb{K})$, prueba que $\mathrm{Conti}(g) \subset \mathrm{Conti}(g^+)$.

8. Prueba que $C[a, b]$ no es reflexivo.

9. Sean E y F espacios topológicos. Prueba:

i) La topología producto en $E \times F$ efectivamente es una topología.

ii) Para cada $y \in F$, la lq inclusión' $x \mapsto (x, a)$ es un homeomorfismo de E en $E \times E \times \{y\}$..

10. Prueba que cualquier espacio normado es un espacio vectorial topológico.

Definición Consideremos un espacio de Hilbert H, un subespacio $V \subset H$ y un operador lineal cerrado $T : V \to H$. En

$$D := \{y \in H : \langle Tx, y\rangle = \langle x, z\rangle, \text{para algún } z \in H\}$$

definamos $T^*y := z$.

11. Prueba:

i) T^* está bien definido. A T^* lo llamaremos operador *adjunto* de T.

ii) T^* es un operador lineal cerrado.

Para revisar y entregarse el viernes 20 de noviembre, 2015