ANALISIS FUNCIONAL 3: TAREA 12

Cuando no indique otra cosa, $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una funcińmonótona creciente y E, F son espacios vectoriales.

1. Dada una función $f \in C[a,b]$ definamos $F(x) := \int_a^x f d\alpha$, $\forall\, x \in (a,b]$ y $F(a) = 0$. Si α es continua, prueba que F es continua.

Sea $\mathcal{C}_0[a,b] := \mathcal{C}[a,b] \cap BV_0[a,b]$. y observa que $\mathcal{C}[a,b]$ es un cono propio ($\mathcal{C} \cap (-\mathcal{C}) = \{0\}$) en $X := BV_0[a,b]$. En adelante siempre consideraremos en X el orden determinado por el cono $\mathcal{C}[a,b]$.

2. Sea $\gamma \in BV_0[a,b]$. Prueba que $\gamma \geq 0$ si, y sólo si, $\varphi_\gamma(f) \geq 0$, $\forall\, f \in C[a,b], f \geq 0$.

Definición Para $f \in BV[a,b]$ definamos $Vf := v_f$.

Dadas $f, g \in X$, definamos

$$f \vee g := \frac{f + g + V(f-g)}{2}.$$

3. Prueba:

i) $f \vee g = g \vee f$.

ii) $f \vee g \geq f$ y $f \vee g \geq g$.

iii) Si $h \geq g$ y $h \geq t$, entonces $h \geq f \vee g$.

4. Si $f \in R(\alpha)$, prueba que f es R-S integrable.

5. Si $A_\alpha \subset E$ es un conjunto convexo, $\forall\, \alpha \in J$, prueba que $\cap_{\alpha \in J} A_\alpha$ también es convexo.

6. Sea $T : E \to F$ un operador lineal. Si $A \subset E$ es convexo, prueba que $T(A) \subset F$ también es convexo.

7. Si $\|\cdot\|$ es una seminorma en E, prueba que $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$, $\forall\, x, y \in E$.

8. Encuentra un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que sea absorbente y no sea ni balanceado ni convexo.

9. Prueba que $S(\mathbb{K}) := \{\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, con su topología producto, es un espacio vectorial topológico.

10. Determina si el interior de un conjunto balanceado también es balanceado.

11. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ y consideremos $X := C[a, b], V := \{f \in X :$ f es derivable en $[a, b], f' \in X\}$.

i) Prueba que $T : V \to X$ definido por $Tf = f'$ es cerrado.

ii) Encuentra $\sigma(T)$.

Para revisar y entregarse el jueves 26 de noviembre, 2015