ANALISIS FUNCIONAL 3: TAREA 13

Cuando no se indique otra cosa, E es un espacio vectorial o un espacio vectorial topológico.

1. Sea $K \subset E$ un conjunto convexo. Si $x_1, \ldots, x_n \in K$, $t_1, \ldots, t_n \geq 0$ y $t_1 + \cdots, +t_n = 1$, prueba que $t_1x_1 + \cdots + t_nx_n \in K$.

2. Si $A_\alpha \subset E$, $\forall\, \alpha \in I$, es un conjunto balanceado, prueba que $\cap_{\alpha \in I} A_\alpha$ también lo es.

3. Prueba que una intersección finita de conjuntos absorbentes es absorbente.
ii) ¿Es cierto la anterior para cualquier intersección?

4. Encuentra un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que sea balanceado y que no sea absorbente ni convexo.

5. Si M y N son espacios métricos, prueba que la función
$$D((a, b), (x, y)) := \text{máx}\{d_M(a, x), d_N(b, y)\}$$
es una métrica en $M \times N$.

6. Sea $D \neq \emptyset$ y para cada $x \in D$ tomemos $E_x := \mathbb{R}$ con su topología usual. Observa que $F(D, \mathbb{R}) := \Pi_{x \in D} E_x$. Prueba:
i) La topología producto en $F(D, \mathbb{R})$ coincide con la topología generada por la familia de seminormas $\{s_x : \alpha \in \mathbb{R}\}$, donde $s_x(f) := |f(x)|$, $\forall\, f \in F(D, \mathbb{R})$.
ii) Concluye que $F(D, \mathbb{R})$, con su topología producto, es un espacio localmente convexo.

Definición Un conjunto $A \subset E$ es *acotado* si para cada $V \in \mathcal{N}_0$ existe $s > 0$ tal que $A \subset tV$, $\forall\, t > s$.
7. Sea $A \subset E$. Si para cada $V \in \mathcal{N}_0$ existe $s > 0$ tal que $A \subset sV$, prueba que A es acotado.
8. Si $W \in \mathcal{N}_0$, prueba que $E = \cup_{n \in \mathbb{N}}\, nW$.

Para revisar y entregarse el lunes 7 de diciembre, 2015