3.2. Continuidad

A continuación M y E siempre son espacio métricos. Aunque pueden ser distintas, tanto la métrica en M como la de E se denotarán por d.

Definición 1 Sea $f : M \to E$.
a) La función f es *continua en* $x \in M$, si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $y \in M$ y $d(y, x) \leq \delta$, entonces $d(f(x), f(y)) \ \leq \epsilon$.
b) La función f es *continua*, si lo es en cada punto de su dominio M.

Consideremos $f : M \to E$. Dado un conjunto no-vacío $A \subseteq M$, a la función $f_A : A \to N$ definida por

$$f_A(x) := f(x), \ \forall\, x \in A,$$

la llamaremos *restricción de* f *a* A. Se acostumbra omitir el subíndice 'A', en cuyo caso tanto la función como su restricción se indican de igual forma.

Supongamos que f es continua en $x \in M$. Si $x \in A \subseteq M$, notemos que la restricción $f : A \to E$ sigue siendo continua en x. Naturalmente, al considerar ahora a A como espacio métrico, la métrica en A es la inducida por la de M.

Observación 1 Consideremos $f : M \to E$ y $x \in M$. Si existe $r > 0$ tal que $f : M \cap V_r(x) \to E$ es continua en x, observemos que f es continua en x.

Esto indica que la continuidad de f en un punto x, es una propiedad que no depende de los valores que tome f en puntos "alejados"de x y por esto se dice que la continuidad en un punto es una *propiedad local*.

Consideremos $f : M \to E$ y $x \in M$. Para analizar la continuidad de f en x puede resultar útil distinguir si x es un punto de acumulación o un punto aislado, según se aprecia a continuación.

Lema 1 *Sean $f : M \to E$. Si $x \in M$ es un punto aislado, entonces f es continua en x.*

Demostración Supongamos que $x \in M$ es un punto aislado. Entonces existe $r > 0$ tal que $M \cap B_r(x) = \{x\}$, esto es, $B_r(x) = \{x\}$. Dado $\epsilon > 0$, tomemos $\delta = r$. Si $y \in B_\delta(x)$, entonces $y = x$, por lo cual $|\, f(y) - f(x)| = 0 < \epsilon$. $\square$

Funciones de Lipschitz

Una clase amplia de funciones no sólamente son continuas, sino que tienen propiedades globales más fuertes. Una de esas propiedades es la siguiente.

Definición 2 Una función $f : M \to E$ es *de Lipschitz*, si existe una constante $C \geq 0$, llamada *constante de Lipschitz*, tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq Cd(x, y),\ \forall\, x, y \in M.$$

Si $f : M \to E$ es de Lipschitz, notemos que f es continua.

Ejemplo 1
1) Sea $f : M \to E$ una función constante, esto es, existe $c \in E$ tal que $f(x) = c$, $\forall\, x \in M$. Entonces f es una función de Lipschitz, con constante de Lipschitz $C = 0$.

2) Sea I la función identidad en M, esto es, I está definida por $I(x) = x$. Entonces I es una función de Lipschitz, con constante de Lipschitz $C = 1$.

Ejemplo 2 Dado $p \in M$ consideremos la función $d_p : M \to \mathbb{R}$ definida por

$$d_p(x) := d(x, p).$$

Sean $x, y \in M$. Usando la desigualdad del triángulo resulta

$$d_p(x) = d(x, p) \leq d(x, y) + d_p(y),\ d(y, p) \leq d(y, x) + d_p(x).$$

Luego

$$|d_p(x) - d_p(y)| \leq d(x, y). \tag{1}$$

Así, d_p es una función de Lipschitz con constante de Lipschitz $C = 1$.

Criterio por sucesiones para continuidad

El siguiente criterio indica que la continuidad se puede describir mediante sucesiones convergentes y resulta ser muy útil.

Teorema 1 *Sean $f : M \to E$ y $p \in M$. Entonces f es continua en p si, y sólo si, para cada sucesión $\{x_n\} \subseteq M$ tal que $x_n \to p$, se cumple que $f(x_n) \to f(p)$.*

Demostración Supongamos primero que f es continua en p y consideremos una sucesión $\{x_n\} \subseteq M$ tal que $x_n \to p$. Para establecer que $f(x_n) \to f(p)$ demos $\epsilon > 0$. Por la continuidad de f en p, existe entonces $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } x \in M \text{ y } d(x,p) \leq \delta, \text{ entonces } d(f(x), f(p)) \leq \epsilon. \tag{2}$$

Ya que $x_n \to p$, a partir de este $\delta > 0$ encontramos $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, p) \leq \delta$, $\forall\, n \geq N$. Por (2), esto implica que $d(f(x_n), f(p)) \leq \epsilon$, $\forall\, n \geq N$.

Para establecer la otra implicación, probaremos su afirmación contrapositiva. Supongamos entonces que f no es continua en x. Luego, existe $\epsilon > 0$ tal que para cada $\delta > 0$, es posible encontrar $x_\delta \in M$ tal que $d(p, x_\delta) \leq \delta$ y $d(f(p), f(x_\delta) \geq \epsilon$. Sea x_n el punto x_δ que se obtiene al tomar $\delta = \frac{1}{n}, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Entonces $d(p, x_n) \leq \frac{1}{n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, por lo que $x_n \to x$. Sin embargo, se cumple que $d(f(p), f(x_n) \geq \epsilon$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Lo cual indica que la sucesión $\{f(x_n)\}$ no converge a $f(p)$. $\square$

Composición de funciones continuas

Estableceremos enseguida que la continuidad se preserva bajo la composición. Los conjuntos M, E y N siempre son espacios métricos.

Teorema 2 *Sean $f : M \to E$, $g : E \to N$ y $p \in M$. Si f es continua en p y g es continua en $f(p)$, entonces la composición $g \circ f$ es continua en p.*

Demostración Obtendremos la conclusión aplicando el criterio por sucesiones para continuidad. Consideremos una sucesión $\{x_n\} \subseteq M$ tal que $x_n \to p$. Por la continuidad de f en p, esto implica que $f(x_n) \to f(p)$. Ya que g es continua en $f(p)$, se sigue que $(g\circ)f(x_n) = g(f(x_n)) \to g(f(p)) = (g\circ f)(p)$. Esto prueba que la composición $g \circ f$ es continua en p. $\square$

Corolario 1 *Si $f : M \to E$ y $g : E \to N$ son funciones continuas, entonces $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ es continua.*

3.3. Espacio normado

Sea M un espacio métrico. Dadas dos funciones $f, g : M \to \mathbb{R}$, podemos considerar su suma y preguntarnos si, por ejemplo, al tener f y g cierta propiedad, ¿la tendrá también su suma? Esto no lo podemos hacer cuando cambiamos $\mathbb{R}$ por un espacio métrico X cualquiera. Para que esto sea posible el conjunto X debe poseer alguna estructura algebraica. A continuación estudiaremos el caso en que X es un espacio vectorial. En esta situación la existencia de una función con propiedades básicas similares a las de la función valor absoluto en $\mathbb{R}$, y que llamaremos norma, resulta fundamental. En particular, veremos que una norma en un espacio vectorial X determina de manera natural una métrica.

Aunque muchas de los conceptos que introduciremos tienen sentido para un espacio vectorial complejo, en adelante sólo consideraremos espacios vectoriales reales.

Definición 1 Sea X un espacio vectorial. Una función $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ es una *norma*, si satisface:

a) $\|x\| \geq 0, \; \forall\, x \in X$ y si $\|x\| = 0$, entonces $x = 0$.

b) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|, \; \forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \; x \in X$,

c) (Desigualdad del tríngulo) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \; \forall\, x, y \in X$.

A un espacio vectorial dotado de una norma lo llamaremos *espacio normado*; la norma generalmente se denotará por $\| \cdot \|$.

Dado un espacio normado X, definamos

$$d(x, y) := \|x - y\|.$$

Procediendo directamente resulta que d es una métrica en X, a la cual llamaremos *métrica inducida por la norma* $\|\cdot\|$. Esta métrica es la que siempre consideraremos al trabajar con un espacio normado como espacio métrico. Una gran cantidad de los espacios métricos con que se trabaja en An'alisis se obtienen de esta manera, como subconjuntos de un espacio normado.

Para establecer que la norma euclidiana en $\mathbb{R}^n$ es una norma, repasaremos antes las propiedades de $\mathbb{R}^n$ que nos servirán de base.

Propiedades básicas de $\mathbb{R}^n$

El punto principal para estudiar a $\mathbb{R}^n$, siendo $n \geq 2$, es la estructura de espacio vectorial con que cuenta.

Estructura de espacio vectorial

Dado $n \in \mathbb{N}$, empecemos recordando que

$$\mathbb{R}^n := \{(a_1, \ldots, a_n) : a_j \in \mathbb{R}, j = 1, \ldots, n\}.$$

Si $x = (a_1, \ldots, a_n)$ y $k = 1, \ldots, n$, llamaremos a a_k *k-ésima componente* de x. La igualdad en $\mathbb{R}^n$ significa entonces igualdad “componente a componente”, esto es

$$(a_1, \ldots, a_n) = (b_1, \ldots, b_n) \text{ si, y sólo si, } a_k = b_k,\ k = 1, \ldots, n.$$

Sean $x = (a_1, \ldots, a_n), y = (b_1, \ldots, b_n)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces, la *suma* de x con y es

$$x + y := (a_1 + b_1, \cdots, a_n + b_n), \tag{1}$$

y la *multiplicación de x por el escalar* λ es

$$\lambda x := (\lambda a_1, \ldots, \lambda a_n). \tag{2}$$

Así, las operaciones algebraicas en $\mathbb{R}^n$ se definen componente a componente.

Observación 1 Notemos que la multiplicación por escalares en $\mathbb{R}^n$ no es propiamente una “operación” entre dos vectores, sino entre un número real y un vector. Esto indica que cuando $n \geq 2$, la estructura algebraica en $\mathbb{R}^n$ es distinta de la estructura de campo que tiene $\mathbb{R}$, donde la multiplicación sí es una operación entre dos números reales. El caso $n = 2$ es muy especial pues $\mathbb{R}^2$ se puede identificar con el campo de números complejos $\mathbb{C}$. Sin embargo, en este curso no trataremos esta situación.

Bajo las operaciones definidas en (1) y (2), $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial. Dado $k \in \{1, \ldots, n\}$ denotaremos por e_k el vector en $\mathbb{R}^n$ cuya k-ésima componente es 1 y las demás son 0. Entonces $\{e_k : k = 1, \ldots, n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$, a la cual llamaremos *base canónica*. Por lo tanto $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial de dimensión n.

Notas
Clase 21, octubre 26, 2020
Fernando Galaz Fontes