Norma euclidiana

Analizaremos a continuación la norma euclidiana en $\mathbb{R}^n$.

Definición 1 La *norma euclidiana* de un vector $x := (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ es

$$\|x\| := \sqrt{a_1^2 + \cdots + \cdots a_n^2}. \tag{1}$$

Observemos que cuando $n = 1$ la norma euclidiana es simplemente el valor absoluto.

Procediendo directamente a partir de su definición resulta que la norma euclidiana satisface las condiciones a) y b) señaladas en la definición de una norma. Para estalecer la desigualdad del triángulo nos apoyaremos en el producto escalar con que cuenta $\mathbb{R}^n$.

El *producto escalar* de los vectores $x = (a_1, \ldots, a_n),\ y = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ es el número real

$$\langle x, y\rangle := a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n. \tag{2}$$

Trabajando por componentes, es sencillo verificar que el producto escalar tiene las siguientes propiedades básicas ($w, x, y \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \in \mathbb{R}$).

i) Es lineal en la primera variable:

$$\langle \lambda w, x\rangle = \lambda\langle w, x\rangle, \qquad \langle y + w, x\rangle = \langle y, x\rangle + \langle w, x\rangle,$$

ii) Es *simétrico*:

$$\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle,$$

iii) Es *positivo definido*:

$$\langle x, x\rangle \geq 0, \quad \text{y} \quad \langle x, x\rangle = 0 \text{ si, y sólo si,} x = 0.$$

Observación 1 Notemos que la linealidad en la primera variable y la simetría implican que el producto escalar también es lineal en la segunda variable. A este tipo de función se le llama *bilineal.*

Nuestro interés en el producto escalar es que la norma euclidiana se puede expresar mediante la relación

$$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n. \tag{3}$$

Probaremos ahora la desigualdad del triángulo. Elevando al cuadrado, encontramos que esta desigualdad equivale a

$$\|x+y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2.$$

De aquí, al utilizar (3) y emplear las propiedades del producto escalar, resulta que la desigualdad anterior corresponde a $\langle x, y\rangle \leq \|x\|\|y\|, \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$.

Concluimos entonces que la norma euclidiana en $\mathbb{R}^n$ satisfará la desigualdad del triángulo si cumple con la llamada *desigualdad de Schwarz*, que es la que estableceremos enseguida.

Teorema 1 *Si $x, y \in \mathbb{R}^n$, entonces*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|. \tag{4}$$

Demostración Si $x = 0$ o $y = 0$ ambos miembros de la desigualdad (4) son 0. Supondremos ahora que $x \neq 0$ y $y \neq 0$. Empezamos notando que si (4) se cumple para $u, v \in \mathbb{R}^n$, entonces se satisface para λu y βv, donde $\lambda, be \in \mathbb{R}$. Esto nos permite suponer que $\|x\| = 1 = \|y\|$.

Expresemos $x = (a_1, \cdots, a_n), y = (b_1, \cdots, b_n)$. Entonces $|a_k||b_k| \leq \frac{a_k^2+b_k^2}{2}$, $k = 1, \ldots, n$. Ya que $1 = \|x\|^2 = \sum_{j=1}^n a_k^2$ y $1 = \sum_{j=1}^n b_k^2$, resulta

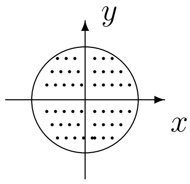
$$|\sum_{j=1}^n a_k b_k| \leq \sum_{j=1}^n |a_k||b_k| \leq \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^n a_k^2 +_{j=1}^n b_k^2\right) = 1.$$

Esto prueba (4). $\square$

Para referirnos a $\mathbb{R}^n$ como espacio normado con su norma euclidiana lo llamaremos *espacio euclidiano n-dimensional*. Cuando sea conveniente distinguir la norma euclidiana de otras normas en $\mathbb{R}^n$ la denotaremos por $\|\cdot\|_2$.

Dado un espacio normado X, a la bola $B_1(0) := \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ la llamaremos *bola unitaria cerrada* en X y se denotará por B_X.

Ejemplo 1 Notemos que $B_{\mathbb{R}} = [-1, 1]$, $B_{\mathbb{R}^2} = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ y $B_{\mathbb{R}^3} = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.



$B_{\mathbb{R}^2} = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$

Figura 1

La norma del supremo

Estudiaremos ahora otra norma en $\mathbb{R}^n$ que es de interés. Para cada vector $x = (x_1, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n$ definimos

$$\|x\|_\infty := \text{máx}\{|\, x_j|: j = 1, \ldots, n\}.$$

Proposición 1 *La función $\|\cdot\|_\infty$ es una norma en $\mathbb{R}^n$, a la cual llamaremos* norma del supremo.

Demostración Consideremos $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Claramente, $\|x\|_\infty \geq 0$ y $\|0\|_\infty = 0$. Supongamos que $\|x\|_\infty = 0$, es decir, $\text{máx}\{|\, x_j|: j = 1, \ldots, n\} = 0$. Entonces $|x_j| = 0$, $j = 1, \ldots, n$. Luego, $x_j = 0$, $j = 1, \ldots, n$. Por lo tanto $x = 0$.

Tomemos $\lambda \in \mathbb{R}$. Ya que $\lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$, resulta

$$\begin{aligned} \|\lambda x\|_\infty &= \text{máx}\{|\lambda x_j| : j = 1, \ldots, n\} \\ &= |\lambda|\, \text{máx}\{|x_j| : j = 1, \ldots, n\} = |\lambda| \|x\|_\infty. \end{aligned}$$

Para establecer la desigualdad del triángulo empecemos notando que $x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$. Fijemos $j \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces

$$|x_j + y_j| \leq |x_j| + |y_j| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

Lo cual implica que

$$\|x + y\|_\infty = \text{máx}\{|x_j + y_j| : j = 1, \ldots, n\} \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty. \quad \square$$

Ya que estaremos trabajando con la norma euclidiana y con la norma del supremo, dados $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$ en lo que sigue denotaremos por $V_r^\infty(x)$ a la bola correspondiente a la norma del supremo.

Lema 1 *Sean* $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *y* $r > 0$. *Entonces*

$$V_r^\infty(x) = (x_1 - r, x_1 + r) \times \cdots \times (x_n - r, x_n + r). \tag{5}$$

Demostración Tomemos $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Entonces $y \in V_r^\infty(x)$ si, y sólo si, $\|y - x\|_\infty < r$. Esto equivale a que $\mid y_j - x_j \mid < r$, esto es, $y_j \in (x_j - r, x_j + r),\ j = 1, \ldots, n$. Así, $y \in (x_1 - r, x_1 + r) \times \cdots \times (x_n - r, x_n + r)$. $\square$

La norma euclidiana y la norma del supremo guardan la siguiente relación.

Lema 2
i) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$.
ii) $V_{\frac{r}{\sqrt{n}}}^\infty(x) \subseteq V_r(x) \subseteq V_r^\infty(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$ *y* $\forall\, r > 0$.

Demostración Sea $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

i)Ya que $\|x\|_\infty$ es algún $\mid x_j \mid$, resulta que $\|x\|_\infty^2 \leq \mid x_1\mid^2 + \cdots + \mid x_n\mid^2$. Se sigue que $\|x\|_\infty \leq \|x\|$.

Por otra parte, observemos que $\mid x_1 \mid^2 + \cdots + \mid x_n \mid^2 \leq n\|x\|_\infty^2$. Luego $\|x\| \leq \sqrt{n}\|x\|$.

ii) Sea $y \in V_{\frac{r}{\sqrt{n}}}^\infty(x)$, esto es, $\|y - x\|_\infty < \frac{r}{\sqrt{n}}$. De acuerdo a i), esto implica que $\|y - x\|_2 < r$. La otra contención se puede establecer análogamente. $\square$

Observación 2 Naturalmente, para las respectivas bolas cerradas se cumplen los resultados correspondientes.

Notas
Clase 22, octubre 26, 2020
Fernando Galaz Fontes