3.4. Convergencia y continuidad en espacios normados

A continuación $(X, \|\cdot\|)$ siempre es un espacio normado y al considerarlo como espacio métrico lo hacemos con la métrica inducida por la norma. Empezaremos estudiando la convergencia en X.

Convergencia

Sean $\{x_n\} \subseteq X$ y $x \in X$. Notemos que la convergencia de $\{x_n\}$ a x significa que la sucesión de números no-negativos $\{\|x_n - x\|\}$ converge a 0, esto es

$$x_n \to x \text{ si, y sólo si, } \|x_n - x\| \to 0.$$

Las siguientes son propiedades básicas de las sucesiones convergentes en X. Nos referiremos a ellas diciendo que *las operaciones vectoriales en X son continuas.*

Teorema 1 *Sean $\{x_n\}, \{y_n\}$ sucesiones en X, $x, y \in X$ y $a \in \mathbb{R}$. Si $x_n \to x$ y $y_n \to y$, entonces:*

i) $x_n + y_n \to x + y$.

ii) $ax_n \to ax$.

Demostración i) Para estimar $\|(x_n + y_n) - (x + y)\|$ usamos la desigualdad del triángulo. Resulta así

$$\|(x_n + y_n) - (x + y)\| \leq \|x_n - x| + \|y_n - y\|. \tag{1}$$

Por otra parte, la hipótesis indica que $\|x_n - x\| \to 0$ y $\|y_n - y\| \to 0$. Siendo c_0 un espacio vectorial, esto implica que $\|x_n - x\| + \|y_n - y\| \to 0$. Usando lo anterior en (1), se sigue que $\|(x_n + y_n) - (x + y)\| \to 0$.

ii) La prueba es similar a la de i). Puesto que $\|x_n - x\| \to 0$ y c_0 es un espacio vectorial concluimos que

$$\|ax_n - ax\| = |a|\|x_n - x\| \to 0. \quad \square$$

Del siguiente ejemplo resulta que la norma en un espacio normado siempre es una función continua.

Ejemplo 1 Sea X un espacio normado. Al tomar $p = 0$ en la desigualdad (2.??) resulta que

$$|\,\|x\| - \|y\|\,| \leq \|x - y\| \;\forall\, x, y \in X.$$

Esto indica que la función norma $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$ es de Lipschitz, con constante de Lipschitz igual a 1.

Como lo hicimos en $\mathbb{R}$, al trabajar en un espacio normado X podemos considerar series. Dada una sucesión $\{x_n\} \subseteq X$, formemos la sucesión de sumas parciales $\{s_N\}$ donde

$$s_N := \sum_{n=1}^{N} x_n, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Definimos ahora que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ es *convergente*, si la sucesión de sus sumas parciales $\{s_n\}$ lo es.

Supongamos que $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ es una serie convergente en X. Entonces

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} x_k \right\| \leq \sum_{k=1}^{m} \|x_k\|, \;\forall\, m \in \mathbb{N}.$$

Haciendo ahora $m \to \infty$, de la continuidad de la norma resulta la desigualdad

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \right\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| \leq \infty.$$

A la cual llamaremos *desigualdad del triángulo para series convergentes.*

Espacio vectorial de funciones continuas vectoriales

Estudiaremos ahora la continuidad de funciones $f : M \to X$, donde M es un espacio métrico y, como dijimos antes, X es un espacio normado.

Dado un conjunto no-vacío D, empezaremos introduciendo operaciones algebraicas en el espacio de funciones $F(D, X)$. Como en el caso en que $X = \mathbb{R}$, lo hacemos puntualmente.

Definición 1 Consideremos un conjunto no-vacío D , un espacio normado X y funciones $f, g : D \to X$. Entonces:

a) Su *suma* es $f + g : D \to X$, donde $[f + g](x) := f(x) + g(x)$.

b) El producto de $a \in \mathbb{R}$ por f es $af : D \to X$, donde $[af](x) := af(x)$.

Dejamos al lector verificar que, con las operaciones anteriores de suma y de producto por escalares, el conjunto $F(D, X)$ es un espacio vectorial. En este caso la función constante 0 es el elemento identidad para la suma y el invers aditivo de f es $-f$, donde $[-f](x) - f(x), \forall\, x \in D$. Resulta entonces

$$[f - g](x) := [f + (-g)] = f(x) + (-g(x)) = f(x) - g(x), \ \forall\, x \in D$$

Supongamos ahora que $D = M$ es un espacio métrico. Denotaremos entonces por $C(M, X)$ el subconjunto de $F(M, X)$ formado por las funciones continuas y tomaremos $C(M) = C(M, \mathbb{R})$. Del siguiente resultado se obtendrá que $C(M, X)$ es un subespacio vectorial de $F(M, X)$.

Lema 1 *Sean $f, g : M \to \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$. Si f y g son continuas en $x \in M$, entonces:*

i) $f + g$ es continua en x.

ii) af es continua en x.

Demostración i) Para verificar la continuidad de $f + g$ en x usaremos el criterio por sucesiones (teorema 2.1). Consideremos entonces una sucesión $\{x_n\} \subseteq M$ que converja a x.

Ya que $x_n \to x$ y tanto f como g son continuas en x, usando el criterio por sucesiones resulta que $f(x_n) \to f(x)$ y $g(x_n) \to g(x)$. Por la continuidad de las operaciones vectoriales en X, esto implica que $f(x_n)+g(x_n) \to f(x)+g(x)$. Usando el criterio por sucesiones para la continuidad podemos concluir ahora que $f + g$ es continua en x.

ii) Empleando el criterio por sucesiones para la continuidad y procediendo como en i) se obtiene la conclusión. $\square$

Teorema 2 *Con sus operaciones usuales, $C(M, X)$ es un espacio vectorial*

Demostración Ya que estamos considerando a $C(M, X))$ con las operaciones que tiene en $F(, X)$, basta verificar que $C(M, X)$ es un subespacio vectorial de $F(D, X)$. Con este propósito notemos primero que la función constante 0 pertenece a $C(D, X)$. Tomemos después $f, g \in C(M, X)$ y $a \in \mathbb{R}$. Aplicando ahora el corolario 1 en cada punto $x \in M$ resulta que $f + g, \ af \in C(M, X)$. $\square$

Álgebra de funciones reales continuas

Regresemos a un conjunto no-vacío D y tomemos ahora $X = \mathbb{R}$. Como se estableció en la sección 2.4, en esta situación el conjunto $F(D) := F(D, \mathbb{R})$ no sólamente es un espacio vectorial, sino que posee un producto definido también puntualmente. Así, para $f, g \in F(D)$ se cumple

$$[fg](x) := f(x)g(x), \forall\, x \in D.$$

El cociente de funciones puede resultar un poco complicado pues el cociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ no está definido en un punto $x \in M$ tal que $g(x) = 0$ Esto lleva a la siguiente definición.

Definición 2 Sean $f, g : D \to \mathbb{R}$. Si $g \neq 0$, entonces la función *cociente* $\frac{f}{g}$ está definida en $D_c := \{x \in D : g(x) \neq 0\}$ por $[\frac{f}{g}](x) := \frac{f(x)}{g(x)}$.

Notemos que si $g(x) \neq 0, \forall\, x \in D$, entonces el dominio de f/g es D.

Lema 2 *Sean $f, g : M \to \mathbb{R}$.*

i) Si f y g son continuas en $x \in M$, entonces fg es continua en x.

ii) Si $g(x) \neq 0$, entonces f/g es continua en x.

Demostración i) Para establecer que fg es continua en x utilizaremos el criterio por sucesiones. Así, tomemos una sucesión $\{x_n\} \subseteq M$ tal que $x_n \to x$. Ya que tanto f como g son continuas en p, dicho criterio establece que $f(x_n) \to f(x)$ y $g(x_n) \to g(x)$. De acuerdo al álgebra de sucesiones convergentes, esto implica que $fg(x_n) = f(x_n)g(x_n) \to f(x)g(x) = fg(x)$. El criterio por sucesiones para continuidad nos indica ahora que fg es continua en x.

ii) Procediendo como en i) obtenemos la conclusión. $\square$

Aplicado el lema anterior en cada punto $x \in D$ en el caso del producto y en cada punto $x \in D_c$ en el caso del cociente llegamos al siguiente resultado.

Corolario 1 *Sean $f, g : M \to \mathbb{R}$. Si f y g son continuas, entonces:*

i) fg es continua.

ii) f/g es continua (en su dominio).

Ya que $C(M)$ es un espacio vectorial y el corolario anterior señala que también es cerrado bajo el producto de funciones, concluimos que $C(M)$ es un álgebra.

Continuidad de polinomios y funciones racionales

A continuación consideraremos $M = \mathbb{R}$ y usaremos que $C(\mathbb{R})$ es un álgebra para construir muchas funciones continuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que son de interés.

Empecemos con una función constante $f(x) = c,\ x \in \mathbb{R}$. Hemos visto ya que $f \in C(\mathbb{R})$.

Por otra parte, ya que la función identidad $I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua, al usar que $C(\mathbb{R})$ es un álgebra resulta que cualquier función potencia,

$$g(x) = x^n, n \in \mathbb{N}.$$

es continua. Usando ahora que $C(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial se obtiene la continuidad de cualquier función de la forma

$$P(x) = c_o + c_1 x + \cdots + c_n x^n,\ x \in \mathbb{R},$$

donde $c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$. Recordemos que a una función P de la forma anterior se le llama *polinomio* y sus términos son $c_0,\ c_1 x, \cdots, c_n x^n$. Si $c_n \neq 0$, entonces n es su *grado*.

Así, hemos probado que todos los polinomios pertenecen a $C(\mathbb{R})$.

2) Una *función racional* R es una función que es el cociente de dos polinomios, esto es

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

donde P y Q son polinomios y Q no es el polinomio 0.

Ya que todo polinomio es una función continua, el corolario anterior implica que cualquier función racional es continua (en su dominio).

Sea M un espacio métrico M y fijemos un subconjunto no-vacío A de M. Denotemos por d_A la restricción de la métrica d a $A \times A$. Es sencillo verificar que d_A es una métrica en A, a la cual llamaremos *métrica inducida* en A por d. Así, cualquier subconjunto no-vacío A de M, con d_A como métrica, sigue siendo un espacio métrico. Para referirnos a esta situación, diremos que A es *subespacio métrico* de M.

Consideremos $x \in A$ y denotemos las bolas abiertas y cerradas en A por $V_r^A(\cdot)$ y $B_r^A(\cdot)$, respectivamente. Entonces

$$V_r^A(x) = \{y \in A : d_A(y, x) < r\} = \{y \in A : d(y, x) < r\} = V_r(x) \cap A.$$

Procediendo similarmente resulta que $B_r^A(x) = B_r(x) \cap A$. Esto muestra que las bolas de A, como subespacio métrico de M, se obtienen intersectando con A las bolas de M.

Ejemplo 2 Consideremos a $\mathbb{N}$ con la métrica inducida por la de $\mathbb{R}$. Entonces todos los puntos de $\mathbb{N}$ son aislados. Aplicando ahora el lema anterior se sigue que cualquier función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ es continua.

Así, en este caso la continuidad de una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ no proporciona información adicional sobre f.

Notas
Clase 23, noviembre 3, 2020
Fernando Galaz Fontes