3.6. Convergencia de sucesiones de funciones

Convergencia puntual

Enseguida siempre D es un conjunto no-vacío y E es un espacio métrico. Recordemos que entonces $F(D,E)=\{f:D\to E\}$.

Consideremos una sucesión $\{f_n\}\subseteq F(D,E)$. Para cada $x\in D$, esta sucesión de funciones da lugar a la sucesión $\{f_n(x)\}$, que es una sucesión en E. Denotemos por D_c el conjunto formado por los puntos $x\in D$ donde la sucesión $\{f_n(x)\}$ converge. Si $x\in D_c$ podemos definir la correspondencia

$$f(x):=\lim_{n\to\infty} f_n(x). \tag{1}$$

Cuando $D_c\neq\emptyset$, a esta función $f:D_c\to E$ la llamaremos *función límite* de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ y se denotará por $\lim_{n\to\infty} f_n$.

Definición 1 Sean $\{f_n\}\subseteq F(D,E)$ y $A\subseteq D$.

a) La sucesión de funciones $\{f_n\}$ *converge puntualmente en* A, si $\{f_n(x)\}\subseteq E$ converge, $\forall\, x\in A$. Cuando $A=D$ simplememento diremos que la sucesión de funciones converge puntualmente.

b) Sea $f:A\to E$. La sucesión de funciones $\{f_n\}$ *converge puntualmente a* f *en* A, si $f=\lim f_n$ en A. Para indicar esto usaremos la notación

$$f_n\to f \text{ en } A.$$

Ejemplo 1 Para cada $n\in\mathbb{N}$, sea $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f_n(x)=x^n$. Analicemos la convergencia de la sucesión de funciones $\{f_n\}$.

Claramente la sucesión $\{x^n\}$ no converge cuando $x=-1$ y converge cuando $x=1$. De esto y de la proposición 2.4.1 se obtiene que

$$\lim f_n(x)=\begin{cases}1, & x=1\\ 0, & |x|<1.\end{cases}$$

Convergencia uniforme

Con mucha frecuencia en Análisis y en sus aplicaciones aparecen naturalmente funciones f que se obtienen como límite de una sucesión de funciones $\{f_n\}$ y donde las funciones f_n son más "sencillas" de manejar que la propia f. Es natural entonces preguntarse si algunas propiedades de estas funciones se conservan al pasar al límite. Por ejemplo, si cada función f_n es continua y $f=\lim_{n\to\infty} f_n$, ¿ es f también continua?

Ejemplo 2 Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea f_n la función definida en el intervalo $(-1, 1]$ por $f_n(x) = x^n$. Como vimos en el ejemplo 1, la función límite $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ resulta ser

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}.$$

Así, en este ejemplo cada función f_n es continua y, sin embargo, su función límite $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ no es continua en $x = 1$.

El ejemplo anterior indica que para preservar la continuidad se requiere de un tipo de convergencia para funciones que sea "más fuerte"que la convergencia puntual. Veamos cómo podemos obtenerlo.

Consideremos $f \in F(D, E)$ y $\{f_n\} \subseteq F(D, E)$. Por definición, que la sucesión $\{f_n\}$ converja puntualmente a f significa que, dados un punto $x \in D$ y $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(f_n(x), f(x)) \ \leq \epsilon, \ \forall\, n \geq N.$$

Observemos que además de depender de $\epsilon > 0$, el índice anterior N depende del punto x en cuestión. (De ahí el nombre de *convergencia puntual.*) Cuando sea posible elegir el índice N de manera que sirva para cualquier $x \in D$ (es decir, "uniformemente"), claramente la convergencia obtenida resultará "más fuerte".

Naturalmente, en las definiciones realizadas con convergencia puntual podemos ahora considerar convergencia uniforme. Lo hacemos enseguida.

Definición 2 Sea $\{f_n\} \subseteq F(D, E)$. La sucesión de funciones $\{f_n\}$ *converge uniformemente en* $A \subseteq D$, si existe una función $f : A \to E$ tal que, para cada $\epsilon > 0$ existe N (dependiente sólo de ϵ) tal que

$$d(f_n(x) - f(x)) \leq \epsilon, \ \forall\, x \in A, \ \forall\, n \geq N. \tag{2}$$

En este caso también diremos que la sucesión de funciones $\{f_n\}$ *converge uniformemente a* f en A y para expresar que esto ocurre usaremos la notación $f_n \xrightarrow{u} f$ en A. Asímismo, cuando $A = D$ simplemente diremos que la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente o que $\{f_n\}$ converge uniformemente a f.

Notemos que la convergencia uniforme implica la convergencia puntual. Además, si $f_n \xrightarrow{u} f$ en $A \subseteq D$, entonces $f_n \to f$ en A.

Interpretación geométrica

En el caso en que D es un intervalo $[a, b]$ resulta muy útil la siguiente interpretación geométrica de la convergencia uniforme.

Fijémonos en la gráfica de la función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Dado $\epsilon > 0$ localicemos después la gráfica de las funciones $f + \epsilon$ y $f - \epsilon$. La condición (2) significa entonces que, para $n \geq N$, la gráfica de f_n debe estar situada dentro de la "banda"limitada por las curvas $y = f(x) + \epsilon$ y $y = f(x) - \epsilon$.

Ejemplo 3 La sucesión de funciones $\{f_n\}$, donde

$$f_n(x) = x^n,\ 0 < x < 1,$$

converge puntualmente a 0. Veamos que esta convergencia no es uniforme.
Desarrollo Procediendo por contradicción, supongamos que $f_n \xrightarrow{u} 0$. Luego, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f_N(x)| \leq \frac{1}{2}$, $\forall\, x \in (0, 1)$. Esto equivale a que

$$x \leq \frac{1}{2^{\frac{1}{N}}},\ \forall\, x \in (0, 1).$$

Claramente, lo anterior no es posible. $\square$

Para sucesiones de funciones el siguiente concepto corresponde al de sucesión de Cauchy de números reales,

Definición 3 Sea D un conjunto no-vacío. Una sucesión $\{f_n\} \subseteq F(D, M)$ es *uniformemente de Cauchy*, si para cada $\epsilon > 0$ existe un índice N tal que

$$d(f_n(x), f_m(x))\ \leq \epsilon,\ \forall\, x \in D, \forall\, n \geq N. \tag{3}$$

Proposición 1 *Sean M un espacio métrico y $\{f_n\} \subseteq F(D, M)$ una sucesión de funciones. Si M es completo, entonces $\{f_n\}$ converge uniformemente si, y sólo si, $\{f_n\}$ es uniformemente de Cauchy.*

Demostración $\Longrightarrow$) Sea $f := \lim f_n$. Dado $\epsilon > 0$, existe entonces $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(f_n(x), f(x))\ \leq \frac{\epsilon}{2},\ \forall\, x \in D,\ \forall\, n \geq N.$$

Luego, si $n, m \geq N$, se satisface

$$d(f_n(x), f_m(x)) \ \leq d(f_n(x), f(x)) + d(f(x), f_m(x)) \ \leq \epsilon, \ \forall\, x \in D.$$

(Nótemos que esta implicación no requiere que M sea completo.)

$\Longleftarrow$) El primer paso para establecer que la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente es proponer la función límite f. Para ello notemos que la condición (3) indica que, para cada $x \in D$, la sucesión $\{f_n(x)\} \subseteq M$ es de Cauchy. Luego, existe

$$f(x) := \lim_{n \to \infty} f_n(x), \ \forall\, x \in D.$$

Debemos ahora probar que la convergencia de $\{f_n\}$ a f es uniforme. Dado $\epsilon > 0$, elijamos $N \in \mathbb{N}$ de manera que se cumpla (3). Fijemos $x \in D$ y $n \geq N$. Ya que $f_m(x) \to f(x)$, por la continuidad de la métrica resulta que $d(f_n(x), f_m(x)) \to d(f_n(x), f(x))$. Haciendo $m \to \infty$ en (3), resulta entonces que $d(f_n(x) - f(x)) \ \leq \epsilon$. Esto prueba lo afirmado. $\square$

Series de funciones

Al igual que de sucesiones de números pasamos antes a sucesiones de funciones, a partir de series de números pasaremos ahora a series de funciones.

Definición 4 Sea $D \neq \emptyset$, $\{f_n\} \subseteq F(D, \mathbb{R})$, $A \subseteq D$ y $f : A \to \mathbb{R}$.

a) La serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *converge puntualmente en* A, si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge, $\forall\, x \in A$. Cuando $A = D$ simplememento diremos que la serie de funciones converge puntualmente.

b) La serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *converge puntualmente a* f en A, si se cumple que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$, $\forall\, x \in A$. En este caso usaremos la notación

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f \text{ en } A.$$

Ejemplo 4 La serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ es una serie de funciones. El teorema 2.11.1 indica que esta serie converge en $x \in \mathbb{R}$ siempre y cuando $|x| < 1$. En este caso $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

Definición 5 Sea $\{f_n\} \subseteq F(D, \mathbb{R})$. La *serie de funciones* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *converge uniformemente*, si la sucesión de sus sumas parciales, $s_m := \sum_{n=1}^{m} f_n$, converge uniformemente.

Proposición 2 (Criterio M de Weierstrass) *Sean X un espacio de Banach y $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ una serie de funciones, donde $f_n : D \to X$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Supongamos que existe $N \in \mathbb{N}$ y una colección $\{M_n : n \geq N\}$ tal que*

$$\|f_n(x)\| \ \leq M_n, \ \forall\, x \in D, \forall\, n \geq N. \tag{4}$$

Si la serie numérica $\sum_{n=N}^{\infty} M_n$ converge, entonces la serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente y absolutamente.

Demostración Estableceremos la conclusión mediante el criterio de Cauchy para convergencia uniforme. Tomemos $s_m = \sum_{n=1}^{m} f_n$, $\forall\, m \in \mathbb{N}$. Luego, para $m > k \geq N$, se cumple

$$\|s_k(x) - s_m(x)\| = \ \|f_m(x) + \ldots + f_{k+1}(x)\| \leq M_m + \cdots + M_{k+1}, \ \forall\, x \in D. \tag{5}$$

Dado $\epsilon > 0$, escojamos N tal que $\sum_{n=k+1}^{m} M_n \ \leq \epsilon$, $\forall\, k > m \geq N$. Usando (5), esto implica que

$$\|s_m(x) - s_k(x)\| \leq \epsilon, \ \forall\, k > m \geq N, \ \forall\, x \in D.$$

Lo cual indica que $\{s_n\}$ es uniformemente de Cauchy.

Por otra parte, para cada $x \in D$, al usar (4) resulta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n(x)\| \leq \sum_{n=1}^{N-1} \|f_n(x)\| + \sum_{n=N}^{\infty} M_n < \infty. \quad \square$$

Notas
Clase 25, noviembre 9, 2020
Fernando Galaz Fontes