3.7. Espacio de funciones acotadas

Sean D un conjunto no-vacío y X un espacio normado. Para $f \in F(D, X)$ definamos
$$\|f\|_\infty := \sup\{\|f(x)\| : x \in D\}. \tag{1}$$
Observemos que esta función puede valer ∞. Consideramos entonces el conjunto
$$B(D, X) := \{f \in F(D) : \|f\|_\infty < \infty\}.$$

Notemos que para $r \geq 0$, de su definición (1) resulta que que
$$\|f\|_\infty \leq r \text{ si y sólo si }, \|f(x)\| \leq r, \forall\, x \in D. \tag{2}$$

Por lo tanto, $B(D, X)$ consiste precisamente de las funciones $f : D \to X$ que son acotadas.

Para establecer lo que sigue podemos proceder como en el caso de la norma $\|\cdot\|_\infty$ en $\mathbb{R}^n$. Dejamos su verificación a cargo del lector.

Lema 1 *$B(D, X)$ es un espacio vectorial y $\|\cdot\|_\infty$ es una norma en $B(D, X)$.*

En adelante siempre que consideremos a $B(D, X)$ como espacio normado supondremos que su norma es $\|\cdot\|_\infty$, a la cual con frecuencia se le llama *norma del supremo.*

Convergencia en $B(D)$ y convergencia uniforme

Supongamos que $\{f_n\}$ es una sucesión en el espacio normado $B(D, X)$, $f \in B(D, X)$ y $f_n \to f$ en $B(D, X)$. Entonces para cualquier $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que
$$\|f_n - f\|_\infty \leq \epsilon,\ \forall\, n \geq N.$$
De acuerdo con (2), esto corresponde a que
$$|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon, \forall\, n \geq N,\ \forall\, x \in D.$$
Lo cual equivale a que $f_n \xrightarrow{u} f$.

La conclusión anterior resulta importante pues nos indica que la convergencia en el espacio $B(D, X)$ coincide con la convergencia uniforme.

Teorema 1 *Si X es un espacio de Banach, entonces el conjunto de funciones acotadas $B(D, X)$ es un espacio de Banach.*

Demostración Sea $\{f_n\} \subseteq B(D, X)$ una sucesión de Cauchy. Entonces $\{f_n\} \subseteq F(D, X)$. Entonces, ya que la convergencia en $B(D, X)$ corresponde a la convergencia uniforme en D, $\{f_n\}$ es uniformemente de Cauchy. Aplicando el criterio de Cauchy para convergencia uniforme, obtenemos $f \in F(D, X)$ tal que $f_n \xrightarrow{u} f$. Sólo falta probar que $f \in B(D, X)$, esto es, que f es acotada.

Puesto que la sucesión $\{f_n\}$ es de Cauchy, esta sucesión es acotada en $B(D, X)$. Existe entonces $c > 0$ tal que

$$\|f_n(x)\| \leq \|f_n\|_\infty \leq c, \ \forall\, x \in D.$$

Fijando primero $x \in D$ y haciendo después $n \to \infty$, de la desigualdad anterior y de la continuidad de la norma se sigue que $\|f(x)\| \leq c$, $\forall\, x \in D$. $\square$

Espacio de sucesiones acotadas

Definamos ℓ^∞ como el subconjunto de $\mathcal{S}$ formado por las sucesiones acotadas. Notemos que ℓ^∞ se puede identificar con el espacio $B(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. La norma $\|\cdot\|_\infty$ en ℓ^∞ toma entonces la forma

$$\|\{x_n\}\|_\infty := \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}.$$

Teniendo presente la identificación de $B(\mathbb{N})$ con ℓ^∞, notemos que el teorema 1 establece que ℓ^∞ es un espacio de Banach.

En adelante denotaremos por c el conjunto de sucesiones reales que son convergentes y por c_0 el subconjunto formado por aquellas que convergen a cero. Notemos que que tanto c como c_0 son subespacios vectoriales de ℓ^∞.

3.8. Convergencia uniforme y continuidad

Estableceremos a continuación que la convergencia uniforme sí preserva la continuidad. Naturalmente, para poder hablar de continuidad, debemos ahora suponer que el dominio D de las funciones es un espacio métrico.

En lo que sigue M y E siempre son espacios métricos.

Lema 1 *Sean $f \in F(M, E)$, $\{f_n\} \subseteq F(M, E)$ una sucesión y $x \in M$. Si cada f_n es continua en x y $f_n \xrightarrow{u} f$, entonces f es continua en x.*

Demostración Sea $\epsilon > 0$. La idea para proponer un número δ adecuado es "aproximar "f por f_n donde n es suficientemente grande.

Consideremos $y \in D$ y $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$d(f(x), f(y)) \;\leq\; d(f(x), f_n(x)) + d(f_n(x), f_n(y)) + d(f_n(y), f(y)). \qquad (1)$$

Puesto que $f_n \xrightarrow{u} f$, podemos encontrar $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(f(y), f_N(y)) \;\leq \frac{\epsilon}{3},\; \forall\, y \in M. \qquad (2)$$

Por otra parte, ya que f_N es continua en N, podemos elegir $\delta > 0$ para que se cumpla

$$d(f_n(x), f_N(y)) \;\leq \frac{\epsilon}{3},\; \text{si } x \in M,\; d(x, y) \;\leq \delta. \qquad (3)$$

Sea $y \in M$ tal que $d(y, x) \;\; \leq \delta$. Empleando (2) y (3), a partir de (1) resulta entonces $d(f(x), f(y)) \leq \epsilon$. Esto prueba que f es continua en x. $\square$

El siguiente resultado es claro.

Teorema 1 *Sean $f \in F(M, E)$ y $\{f_n\} \subseteq F(M, E)$ una sucesión de funciones. Si cada f_n es continua y $f_n \xrightarrow{u} f$, entonces f es continua.*

Aunque la convergencia no sea uniforme en todo el dominio, la función límite de funciones continuas puede ser continua. Analizaremos a continuación un caso de importancia donde esto sucede.

Definición 1 Sean $f \in F(M, E)$ y $\{f_n\} \subseteq F(M, E)$. La sucesión de funciones $\{f_n\}$ *converge localmente uniformemente* a f, si para cada $x \in M$, existe $r > 0$ tal que $f_n \xrightarrow{u} f$ en la bola $V_r(x)$.

Teniendo presente que la continuidad es una propiedad local y usando el lema 1 se obtiene directamente la siguiente consecuencia.

Corolario 1 *Sean $f \in F(M, E)$ y $\{f_n\} \subseteq F(M, E)$ una sucesión de funciones. Si cada f_n es continua y $\{f_n\}$ converge localmente uniformemente a f, entonces f es continua.*

Serie de potencias

Dada una sucesión $\{a_n : n \in \mathbb{N}_0\} \subseteq \mathbb{R}$, a la serie de funciones $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ la llamaremos *serie de potencias*. Naturalmente, el primer punto es determinar para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ una serie de potencias converge. Notemos que, al menos, esto siempre sucede cuando $x = 0$.

Definición 2 El *radio de convergencia* de una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ es $R := \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$, donde tomamos $\frac{1}{\infty} := 0$ y $\frac{1}{0} := \infty$.

Teorema 2 *Sean $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie de potencias y R su radio de convergencia.*
i) Si $|x| < R$, entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge absolutamente.
ii) Si $|x| > R$, entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ diverge.

Demostración Dado $x \in \mathbb{R}$, notemos que

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}. \tag{4}$$

Tomemos $\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

i) Si $\alpha = \infty$, entonces $R = 0$ y la conclusión se cumple por vacuidad. Si $\alpha = 0$, entonces de (4) y el criterio de la raiz enésima para la converegencia de series resulta que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge para cualquier $x \in \mathbb{R}$. Esto prueba que la conclusión se cumple.

Finalmente, supongamos que $0 < \alpha < \infty$ y sea x tal que $|x| < R = \frac{1}{\alpha}$. Entonces usando (4) y el criterio de la raíz enésima llegamos a que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge absolutamente.

ii) De (4) y (la segunda parte en) el criterio de la raíz enésima resulta que la serie $\sum a_n x^n$ diverge para cualquier x tal que $|x|\alpha > 1$. Lo cual equivale a que $|x| > R = \frac{1}{\alpha}$. $\square$

Consideremos una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ cuyo radio de convergencia R es positivo. De acuerdo al teorema anterior, definimos ahora la función

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \ |x| < R. \tag{5}$$

Estableceremos a continuación que f es continua.

Teorema 3 *Sea* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *una serie de potencias con radio de convergencia* $R > 0$ *y definamos* f *como en (5).*

i) Si $0 < r < R$*, entonces la serie de potencias converge uniformemente en* $(-r, r)$*.*

ii) Entonces f *es continua.*

Demostración i) Fijemos r tal que $0 < r < R$. Notemos que

$$|a_n||x^n| \leq |a_n|r^n, \ \forall\, x \in [-r, r]$$

Por otra parte, de i) en el teorema anterior resulta que $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|r^n < \infty$. Junto con lo anterior, esto permite aplicar el criterio M de Weierstrass para concluir que la convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ en el intervalo $(-r, r)$ es uniforme.

ii) Empecemos notando que de i) resulta que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge localmente uniformemente en $(-R, R)$. Ya que cada función $x \mapsto a_n x^n$ es continua, las sumas parciales de la serie de potencias también son funciones continuas. Aplicando ahora el corolario 1 concluimos que f es continua. $\square$

Ejemplo 1 Consideremos la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Para encontrar $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}}$, y así establecer su radio de convergencia, usaremos la proposición 2.13.2, la cual indica que $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n}$, cuando $b_n > 0, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Ya que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

resulta que $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0$. El teorema 2 indica ahora que el radio de convergencia de dicha serie es ∞. Esto nos permite definir una función E por

$$E(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Aplicando el teorema 3, notemos que E es continua.

El espacio $\mathbb{R}^n$ cuenta con n funciones reales que son muy importantes y que describimos a continuación.

Fijemos $j = 1, \ldots, n$ y para $x = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ definamos

$$\pi_j(x) = a_j.$$

A esta función $\pi_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la llamaremos *j-ésima proyección* sobre $\mathbb{R}$. Observemos que π_j es una función lineal. Además, ya que la convergencia en $\mathbb{R}^n$ equivale a la convergencia por componentes, resulta que π_j es continua.

Notas
Clase 26, noviembre 11, 2020
Fernando Galaz Fontes