3.9. Topología

Consideremos un espacio métrico M y supongamos que $\widetilde{d}$ es otra métrica en M tal que si $x \in M$ y $\{x_n\}$ es cualquier sucesión en M, se cumple que

$$d(x_n, x) \to 0 \text{ si, y sólo si, } \widetilde{d}(x_n, x) \to 0.$$

Tomemos ahora cualquier espacio métrico E y consideremos una función $f : M \to E$. Observemos entonces que

$$f \text{ es continua en } p \text{ bajo } d \text{ si, y sólo si, lo es bajo } \widetilde{d}.$$

Esto nos lleva a reflexionar en el sentido de que la continuidad no depende “esencialmente ”de la métrica involucrada, sino que permanece bajo ciertos cambios. Esto sugiere la existencia de una estructura más general bajo la cual se puede estudiar la continuidad, lo cual conduce a la estructura abstracta de espacio topológico. En nuestro caso sólo nos ocuparemos, implícitamente, de sus conceptos más sencillos.

Las dos clases de subconjuntos de un espacio métrico M que estudiaremos a continuación, resultan ser de importancia fundamental.

Conjuntos abiertos

Definición 1 Sean M un espacio métrico y $A \subseteq M$.
a) Un punto $x \in A$ es *punto interior* de A, si existe $r > 0$ tal que $V_r(x) \subseteq A$. Al conjunto formado por los puntos interiores de A, lo llamaremos *interior* de A y lo denotaremos por A^0.
b) El conjunto A es un *conjunto abierto* si cada uno de sus puntos es un punto interior.

Ejemplo 1 Dados $a, b \in \mathbb{R}$, notemos que el intervalo $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto abierto. Así, la definición introducida es consistente con el uso acostumbrado de ‘intervalo abierto’.

De manera más general, se satisface:

Proposición 1 *Para cualquier $x \in M$ y $r > 0$, la bola $V_r(x)$ es un conjunto abierto.*

Demostración De acuerdo a la definición, hay que probar que cada punto de $V_r(x)$ es un punto interior. Sea pues $y \in V_r(x)$. Debemos ahora encontrar $s > 0$ tal que si $d(z, y) < s$, entonces $d(z, x) < r$.

Consideremos $s > 0$ y z tal que $d(z, y) < s$. Luego

$$d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) < s + d(y, x).$$

Entonces, tomando $s := r - d(y, x) > 0$ se cumple entonces lo deseado. $\square$

Proposición 2 *Para cualquier conjunto $A \subseteq M$ se cumple:*

i) *$A^0 \subseteq A$ y A^0 es abierto.*

ii) *Si $B \subseteq A$, entonces $B^0 \subseteq A^0$.*

iii) *A es abierto si, y sólo si, $A = A^0$.*

Demostración i) Claramente $A^0 \subseteq A$. Sea $x \in A^0$. Luego, existe $r > 0$ tal que $V_r(x) \subseteq A$. Siendo $V_r(x)$ un conjunto abierto, se sigue que $V_r(x) \subseteq A^0$.

Lo afirmado en ii) es claro y iii) se obtiene de i) y la proposición 1 . $\square$

Las siguientes son las propiedades básicas de los conjuntos abiertos en un espacio métrico M.

Teorema 1

i) *El conjunto vacío $\emptyset$ y M son conjuntos abiertos.*

ii) *Si $\{V_i : i \in I\}$ es una colección arbitraria de conjuntos abiertos en M, entonces la unión $\bigcup_{i \in I} V_i$ es un conjunto abierto.*

iii) *Si $\{V_1, \ldots, V_m\}$ es una colección finita de conjuntos abiertos en M, entonces la intersección $\bigcap_{i=1}^{n} V_i$ es abierto.*

Demostración Las propiedades i) y ii) son claras. Enseguida estableceremos iii). Supongamos que $V_1, \ldots, V_m$ forman una colección finita de abiertos en M y consideremos $x \in \cap_{j=1}^{m} V_j$. Luego, para cada $j = 1, \ldots, m$, existe $r_j > 0$ tal que $V_{r_j}(x) \subseteq V_j$. Sea $r := \text{mín}\{r_1, \ldots, r_m\} > 0$. Entonces, $V_r(x) \subseteq V_j$, $j = 1, \ldots, m$, esto es, $V_r(x) \subseteq \cap_{j=1}^{m} V_j$. $\square$

Sea E cualquier conjunto. A una colección τ de subconjuntos de E con las propiedades indicadas para los conjuntos abiertos en el lema anterior, se le llama *topología* y se dice que (E, τ) es un *espacio topológico*.

De esta manera, el teorema 1 indica que toda métrica induce de manera natural una topología. En otras palabras, todo espacio métrico es un espacio topológico. Como veremos, la importancia de esto es que algunos de los conceptos o propiedades que estamos analizando no dependen específicamente de la métrica involucrada, sino de la topología correspondiente.

Ejemplo 2 La intersección de una colección infinita de conjuntos abiertos puede no ser un conjunto abierto.
Desarrollo Consideremos a $\mathbb{R}$ con su métrica canónica. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea V_n el intervalo $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$. Claramente cada conjunto V_n es abierto en $\mathbb{R}$. Sin embargo, su intersección $\cap_{n\in\mathbb{N}} V_n = \{0\}$ no es abierto.

Conjuntos cerrados

Notación Dado un conjunto $A \subseteq M$, designaremos por A^c su complemento respecto de M, esto es
$$A^c := M \setminus A.$$

Definición 2 Sea M un espacio métrico. Un conjunto $A \subseteq M$ es *cerrado*, si A^c es un conjunto abierto.

En correspondencia con las de los conjuntos abiertos, las siguientes son las propiedades básicas de los conjuntos cerrados.

Proposición 3
i) *$\emptyset$ y M son conjuntos cerrados.*

ii) *Si $\{C_\alpha : \alpha \in I\}$ es cualquier colección (no vacía) de conjuntos cerrados en M, entonces $\bigcap_{\alpha\in I} C_\alpha$ es cerrado.*

iii) *Si $\{C_1, \ldots, C_m\}$ es una colección finita de conjuntos cerrados en M, entonces $\bigcup_{j=1}^m C_j$ es cerrado.*

Demostración Puesto que M y $\emptyset$ son conjuntos abiertos, resulta que $\emptyset$ y M son cerrados. Usando las leyes de De Morgan, las propiedades ii) y iii) se siguen de las propiedades correspondientes de los conjuntos abiertos. Como ejemplo, probaremos iii).

iii) Veamos que $(\bigcup_{j=1}^m C_j)^c$ es un conjunto abierto. Utilizando una de las leyes de De Morgan, resulta que
$$\left(\bigcup_{j=1}^{m} C_j\right)^c = \bigcap_{j=1}^{m} C_j^c. \tag{1}$$

Ya que cada conjunto C_j^c es abierto y hay un número finito de ellos, su intersección sigue siendo un conjunto abierto. $\square$

Definición 3 Sea M un espacio métrico. La *cerradura* de $A \subseteq M$ es el conjunto formado por aquellos puntos $x \in M$ tales que $V_r(x) \cap A \neq \emptyset$, $\forall\, r > 0$. La cerradura de A se denotará por $\overline{A}$.

Proposición 4 *Para cualquier conjunto $A \subseteq M$ se cumple:*

i) *$A \subseteq \overline{A}$ y $\overline{A}$ es cerrado.*

ii) *Si $B \subseteq A$, entonces $\overline{B} \subseteq \overline{A}$.*

iii) *A es cerrado si, y sólo si, $A = \overline{A}$.*

Demostración i) La contención $A \subseteq \overline{A}$ es clara. Para concluir que $\overline{A}$ es cerrado, probaremos enseguida que $\overline{A}^c$ es un conjunto abierto. Para esto tomemos $x \in \overline{A}^c$. Por definición, existe entonces $r > 0$ tal que $V_r(x) \cap A = \emptyset$. Ya que $V_r(x)$ es abierto, esto implica que $V_r(x) \subseteq \overline{A}$. Así, x es punto interior de $\overline{A}^c$.

Claramente se cumple lo señalado en ii).

iii) De acuerdo con i), sólo falta probar que si A es cerrado, entonces $\overline{A} = A$. Para esto basta establecer que $\overline{A} \subseteq A$. Lo cual equivale a que $A^c \subseteq \overline{A}^c$. Tomemos pues $x \in A^c$. Por la hipótesis, A^c es un conjunto abierto. Luego, existe $r > 0$ tal que $V_r(x) \subseteq A^c$, esto es, $V_r(x) \cap A = \emptyset$. Así, $x \in \overline{A}^c$.

Ejemplo 3

1) Sean $a, b \in \mathbb{R}$. El intervalo $[a, b]$ es entonces cerrado en $\mathbb{R}$. Así, la definición introducida es consistente con el uso acostumbrado de 'intervalo cerrado'.

2) Puesto que $\mathbb{Z}^c$ es abierto en $\mathbb{R}$ con su métrica usual, el conjunto de números enteros $\mathbb{Z}$ es cerrado.

3) Cualquier subconjunto finito de un espacio métrico es cerrado.

Demostración Sea $A \subseteq M$ un conjunto finito. Ya que la unión finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado, basta considerar el caso en que $A = \{x\}$, donde $x \in M$.

Sea pues $x \in M$. Para establecer que $\{x\}^c$ es abierto tomemos $y \in \{x\}^c$. Luego $r = d(x, y) > 0$. Por consiguiente $V_{\frac{r}{2}}(y) \subseteq \{x\}^c$. Esto prueba que y es punto interior de $\{x\}^c$. $\square$

A continuación describiremos mediante sucesiones convergentes la cerra-du-ra de un conjunto $A \subseteq M$.

Proposición 5 *Sea $A \subseteq M$. Las siguientes propiedades son equivalentes:*
i) $x \in \overline{A}$.
ii) *Existe una sucesión $\{x_n\} \subseteq A$ tal que $x_n \to x$.*

Demostración i) $\Longrightarrow$ ii) Sea $x \in \overline{A}$. Luego $V_r(x) \cap A \neq \emptyset$, $\forall\, r > 0$. Tomando $r = \frac{1}{n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, existe entonces $x_n \in V_{\frac{1}{n}}(x) \cap A$. Luego $\{x_n\} \subseteq A$ y la desigualdad $d(x, x_n) < \frac{1}{n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, implica que $x_n \to x$.

ii) $\Longrightarrow$ i) Supongamos ahora que $\{x_n\} \subseteq A$ es una sucesión tal que $x_n \to x$. Sea $r > 0$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ de manera que $d(x_N, x) < r$. Por lo tanto, $x_N \in V_r(x) \cap A$. $\square$

Corolario 1 (Criterio por sucesiones para la cerradura) *Sea $A \subseteq M$. Si para cualquier sucesión $\{x_n\} \subseteq A$ que es convergente (en M) se cumple que $\lim_{n\to\infty} x_n \in A$, entonces A es cerrado.*

Observación 1 Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no-vacío. Luego, existen sucesiones $\{a_n\}, \{b_n\} \subseteq A$ tales que $a_n \to \inf A$ y $b_n \to \sup A$. Usando la proposición 5 se obtiene entonces lo siguiente:
i) Si A es cerrado y está acotado superiormente, entonces $\sup A \in A$.
ii) Si A es cerrado y está acotado inferiormente, entonces $\inf A \in A$.

Proposición 6 *Sean $r > 0$ y $p \in M$. Entonces la bola $B_r(p)$ es un conjunto cerrado.*

Demostración Para establecer que $B_r(p)$ es cerrado usaremos el criterio por sucesiones (corolario 1). Consideremos entonces una sucesión $\{x_n\} \subseteq B_r(p)$ y $x \in M$ tal que $x_n \to x$. Puesto que $d(x_n, p) \leq r$, al hacer $n \to \infty$ y tener presente la continuidad de la métrica resulta $d(x, p) \leq r$. Así, $x \in B_r(p)$. $\square$

Notas
Clase 27, noviembre 17, 2020
Fernando Galaz Fontes