## 3.11. Compacidad

Como lo expresamos al iniciar nuestro estudio de espacios métricos, uno de nuestras motivaciones es generalizar el teorema de Weierstrass, esto es, nos interesa determinar qué propiedad debe tener un espacio métrico $K$ para que cualquier función continua $f : K \to \mathbb{R}$ tenga un valor máximo y un valor mínimo. Esta propiedad, que será llamada *compacidad* constituye uno de los conceptos fundamentales en el análisis matemático.

En lo que sigue $M$ siempre es un espacio métrico.

**Definición 1** Sea $K \subseteq M$.

a) Una *cubierta* de $K$ es una colección $\{U_\alpha : \alpha \in I\}$ de subconjuntos de $M$, tal que $K \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$. Si además cada conjunto $U_\alpha$ es abierto (en $M$), la llamaremos *cubierta abierta* de $K$.

b) El conjunto $K$ es *compacto en* $M$, si cualquier cubierta abierta de $K$ posee una subcubierta finita. Es decir, si siempre que $\{U_\alpha : \alpha \in I\}$ sea una cubierta abierta de $K$, entonces existe un número finito de índices $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in I$ tales que $K \subseteq \bigcup_{j=1}^n U_{\alpha_j}$.

c) El conjunto $K$ es *compacto*, si de cualquier cubierta de $K$ formada por abiertos en $K$ se puede extraer una subcubierta finita.

**Ejemplo 1** Si $K \subseteq M$ es un conjunto finito, notemos que $K$ es compacto en $M$.

Más generalmente, notemos que si $\{K_1, \ldots, K_n\}$ es una colección finita de conjuntos compactos en $M$, entonces $\bigcup_{j=1}^n K_j$ es compacto en $M$.

Sea $K \subseteq M$. Aunque $K$ siempre es abierto relativo, puede no ser abierto en $M$. Asímismo, $K$ siempre es cerrado relativo y puede no ser cerrado en $M$. Probaremos ahora que esto no ocurre con un conjunto compacto $K$.

**Proposición 1** *Un conjunto $K \subseteq M$ es compacto en $M$ si, y sólo si, es compacto.*

**Demostración** Sea $K \subseteq M$. Supongamos primero que $K$ es compacto en $M$. Para establecer que $K$ es compacto, consideremos una cubierta $\{V_\alpha : \alpha \in J\}$ de $K$, donde cada $V_\alpha$ es abierto en $K$. De acuerdo a la proposición 10.**??**, expresemos $V_\alpha = U_\alpha \cap K$, donde $U_\alpha$ es abierto en $M$. Claramente, la colección $\{U_\alpha : \alpha \in J\}$ es una cubierta de $K$ formada por abiertos en $M$. Por hipótesis se obtiene entonces un conjunto finito $F \subseteq J$ tal que $\{U_\alpha : \alpha \in F\}$ es cubierta de $K$. Luego, $\{V_\alpha : \alpha \in F\}$ es una cubierta finita de $K$.

Sea $\{U_\alpha : \alpha \in J\}$ una cubierta de $K$, donde cada $U_\alpha$ es abierto en $M$. Entonces $\{U_\alpha \cap K : \alpha \in J\}$ sigue siendo cubierta de $K$ y está formada por abiertos en $K$. Aplicando la hipótesis, obtenemos ahora un conjunto finito $F \subseteq J$ tal que $\{U_\alpha \cap K : \alpha \in F\}$ es cubierta de $K$. Entonces $\{U_\alpha : \alpha \in F\}$ es cubierta finita de $K$. $\Box$

**Lema 1** *Si $M$ es compacto y $K \subseteq M$ es cerrado, entonces $K$ es compacto.*

**Demostración** Sea $\{U_\alpha : \alpha \in I\}$ una cubierta abierta de $K$. Notemos entonces que $M \subseteq K^c \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$. Siendo $M$ compacto, esto implica que existe un conjunto finito $F \subseteq I$ tal que $M \subseteq K^c \bigcup_{\alpha \in F} U_\alpha$. Luego $K \subseteq \bigcup_{\alpha \in F} U_\alpha$. $\Box$

Puesto que se define usando sólamente abiertos, se dice que la compacidad es un concepto topológico. A continuación describiremos la compacidad en un espacio métrico $M$ usando la métrica correspondiente.

**Definición 2** Sea $M$ un espacio métrico y $K \subseteq M$.
a) El conjunto $K$ es *totalmente acotado en $M$*, si para cada $\epsilon > 0$ existe un número finito de puntos $x_1, \ldots, x_n \in M$ tales que $K \subseteq \bigcup_{j=1}^n V_\epsilon(x_j)$.
b) El conjunto $K$ es *totalmente acotado*, si $K = \emptyset$ o si $K \neq \emptyset$ y es totalmente acotado en $K$, esto es, los puntos $x_1, \ldots, x_n$ en a) se pueden tomar en $K$.

Ya que cada bola en un espacio métrico $M$ es un conjunto acotado y la unión finita de conjuntos acotados también es un conjunto acotado, concluimos que todo conjunto totalmente acotado es acotado.

**Lema 2** *Sea $K \subseteq M$. Entonces:*

*i) $K$ es totalmente acotado en $M$ si, y sólo si, $K$ es totalmente acotado.*

*ii) Si $M$ es totalmente acotado, entonces $K$ es totalmente acotado.*

**Demostración** i) Supongamos primero que $K$ es totalmente acotado en $M$. Si $K = \emptyset$, por definición $K$ es totalmente acotado. Consideremos ahora $K \neq \emptyset$. Dado $\epsilon > 0$ existen $x_1, \ldots x_n \in M$ tales que

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} V_{\frac{\epsilon}{2}}(x_j). \tag{1}$$

Sea $F = \{j \in \mathbb{N} : 1 \leq j \leq n, V_{\frac{\epsilon}{2}}(x_j) \cap K \neq \emptyset\}$. Puesto que $K \neq \emptyset$, notemos que $F \neq \emptyset$. Para cada $j \in F$, elijamos $y_j \in V_{\frac{\epsilon}{2}}(x_j) \cap K$. Veamos que $K \subseteq \bigcup_{j \in F} V_\epsilon(y_j)$. Sea $x \in K$. Empleando (1) permite elegir $j_0 = 1, \ldots, n$, tal que $x \in V_{\frac{\epsilon}{2}}(x_{j_0})$. Luego $j_0 \in F$ y $d(x, y_{j_0}) \leq d(x, x_{j_0}) + d(x_{j_0}, y_{j_0}) < \epsilon$. Esto prueba que $K$ es totalmente acotado.

La implicación recíproca es clara.

ii) Supongamos que $M$ es totalmente acotado. Entonces, $K$ es totalmente acotado en $M$. Usando i) concluimos ahora que $K$ es totalmente acotado. □

**Teorema 1** *Sea $K$ un espacio métrico. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

i) *$K$ es compacto.*

ii) *Cualquier sucesión en $K$ tiene una subsucesión convergente.*

iii) *$K$ es completo y totalmente acotado.*

**Demostración** Probaremos i) $\Longrightarrow$ ii) $\Longrightarrow$ iii) $\Longrightarrow$ i).

i) $\Longrightarrow$ ii) Probaremos la afirmación contrapositiva. Supongamos que existe una sucesión $\{x_n\} \subseteq K$ que no tiene subsucesiones convergentes en $K$. Notemos primero que esto implica que $\{x_n\}$ no es un conjunto finito. Además, para cada $x \in K$ existen $r(x) > 0$ y $n(x) \in \mathbb{N}$ tales que si $x_n \in V_{r(x)}(x)$, entonces $n \leq n(x)$. La colección $\{V_{r(x)}(x) : x \in K\}$ es entonces una cubierta abierta de $K$ y notemos que ninguna de sus subcubiertas es finita.

ii) $\Longrightarrow$ iii) Trabajaremos nuevamente con las afirmaciones contrapositivas.

Supongamos primero que $K$ no es totalmente acotado. Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que para cualquier subconjunto finito $F$ de $K$, se cumple que

$$K \subsetneq \bigcup_{x \in F} V_\epsilon(x). \tag{2}$$

Tomemos como $x_1$ cualquier elemento de $K$. Después, utilizando (2), escojamos $x_2 \in K$ de manera que $d(x_2, x_1) \geq \epsilon$. Continuando de esta forma, la condición (2) permite construir una sucesión $\{x_n\} \subseteq K$ tal que

$$d(x_n, x_j) \geq \epsilon, \text{ cuando } n \neq j.$$

Notemos ahora que no converge ninguna subsucesión de la sucesión $\{x_n\}$.

Supongamos que $K$ no es completo. Luego, existe una sucesión $\{x_n\} \subseteq K$ que es de Cauchy y que no es convergente. De acuerdo al lema 6.**??**, esto implica que ninguna de sus subsucesiones es convergente.

iii) $\Longrightarrow$ i) Supongamos que el espacio métrico $K$ es totalmente acotado y completo. Ya que $K = \emptyset$ es un conjunto compacto, consideraremos que $K \neq \emptyset$. Sea $\mathcal{C} = \{U_\alpha : \alpha \in I\}$ una cubierta abierta de $K$. Procediendo por contradicción, supongamos que

$$\text{ninguna subcolección finita de } \mathcal{C} \text{ cubre a } K. \tag{3}$$

Por ser $K$ totalmente acotado en $K$, existe un número finito de puntos en $K$, digamos $x_{1,1}, \cdots, x_{1,m(1)}$, tales que $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{m(1)} V_{2^{-1}}(x_{1,j})$. De (3) se sigue entonces que hay algún $x_{1,j}$ tal que ninguna subcolección finita de $\mathcal{C}$ cubre a la bola $V_{2^{-1}}(x_{1,j}) \cap K$. Tomemos $x_1 := x_{1,j}$.

Observando que $V_{2^{-1}}(x_1)$ es totalmente acotado repetimos el paso anterior en $V_{2^{-1}}(p_1)$, ahora con $\epsilon = 2^{-2}$, obtenemos un número finito de puntos $x_{2,1}, \cdots, x_{2,m(2)} \in V_{2^{-1}}(x_1)$ de manera que $V_{2^{-1}}(x_1) \subseteq \bigcup_{j=1}^{m(2)} V_{2^{-2}}(x_{2,j})$. Argumentando como en el paso anterior, concluimos que existe algún $x_{2,j}$ tal que ninguna subcolección de $\mathcal{C}$ que sea finita cubre a la bola $V_{2^{-2}}(x_{2,j})$. Tomemos $x_2 = x_{2,j}$ y notemos que $d(x_2, x_1) \leq 2^{-1}$.

Continuando con este proceso obtenemos una sucesión $\{x_n\} \subseteq K$ tal que

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq 2^{-n}, \tag{4}$$

y

$$\text{ninguna subcolección finita de } \mathcal{C} \text{ cubre a } V_n, \tag{5}$$

donde $V_n$ es la bola abierta con centro en $x_n$ y radio $2^{-n}$.

Usando (4) resulta que

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m-1}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n) \leq 2^{-(m-1)} + \cdots + 2^{-n} \\ &\leq 2^{-n+1}, \ \forall m > n. \end{aligned}$$

Se sigue de lo anterior que $\{x_n\} \subseteq K$ es una sucesión de Cauchy. Puesto que $K$ es completo, esta sucesión converge, digamos a $x \in K$. Tomemos $\alpha \in J$ tal que $x \in U_\alpha$ y elijamos $r > 0$ de manera que $V_r(x) \subseteq U_\alpha$. Escojamos ahora $n$ suficientemente grande para que se cumpla

$$\frac{1}{2^n} \leq \frac{r}{2}, \quad d(x_n, x) \leq \frac{r}{2}.$$

Si $y \in V_n$, entonces

$$d(y, x) \leq d(y, x_n) + d(x_n, x) < r.$$

Esto muestra que $V_n \subseteq V_r(x) \subseteq U_\alpha$, lo cual contradice (5). $\square$

**Lema 3** *Sea $M$ un espacio métrico y $C \subseteq M$, $C \neq \emptyset$.*
*i) Si $C$ es completo, entonces $C$ es cerrado.*
*ii) Si $M$ es completo y $C$ es cerrado, entonces $C$ es completo.*

**Demostración** i) Consideremos una sucesión $\{x_n\} \subseteq M$ y $x \in M$ tal que $x_n \to x$. Puesto que $\{x_n\}$ es de Cauchy, existe entonces $c \in C \subseteq M$ tal que $x_n \to c$. De acuerdo a la unicidad del límite, se sigue que $x = c \in C$. Esto prueba que $C$ es cerrado.

ii) Sea $\{x_n\} \subseteq C$ una sucesión de Cauchy. Ya que $M$ es completo, existe $x \in M$ tal que $x_n \to x$. Siendo $C$ cerrado, se sigue que $x \in C$ y $x_n \to x$. Concluimos así que $C$ es completo. $\square$

**Observación 1** Supongamos que un espacio métrico $M$ es completo. Del lema anterior resulta entonces que si $K \neq \emptyset$, entonces $K \subseteq M$ es cerrado si, y sólo si, $K$ es completo.

**Corolario 1** *Un conjunto $K \subseteq \mathbb{R}^n$ es compacto si, y sólo si, es cerrado y acotado.*

**Demostración** Supongamos primero que $K \subseteq \mathbb{R}^n$ es compacto. Del teorema 1 resulta que $K$ es completo y totalmente acotado. Por el lema anterior, $K$ es entonces cerrado. Además, siendo totalmente acotado, $K$ es acotado.

Supongamos ahora que $K \subseteq \mathbb{R}^n$ es cerrado y acotado. Si $K = \emptyset$ la conclusión es clara. Consderemos $K \neq \emptyset$. Para establecer que $K$ es compacto usaremos el criterio por sucesiones establecido en el teorema 1. Sea $\{x_n\} \subseteq K$ una sucesión. Puesto que $K$ es acotado, el teorema de Bolzano-Weierstrass indica que $\{x_n\}$ tiene una subsucesión convergente, digamos a $x \in \mathbb{R}^n$. Siendo $K$ cerrado se sigue que $x \in K$. $\square$

Del corolario anterior obtenemos inmediatamente lo siguiente.

**Ejemplo 2** Para cada $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, la bola cerrada $B_r(x)$ es compacto.