TAREA 10: ANÁLISIS I

En donde corresponda, prueba lo indicado.

1. Si P es un polinomio de grado n, entonces P tiene a lo más n raíces.

2. Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones de números reales y $a \in \{-\infty, \infty\}$. Si $a_n \to a$ y $\{b_n\}$ es acotada, entonces $a_n + b_n \to a$.

3. Si L es un límite subsecuencial de una sucesión $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}^*$, entonces

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq L \leq \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

4. Para cada $x \in \mathbb{R}$, determina $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, donde $f_n(x)= \dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$.

5. i) $e > (1+\frac{1}{n})^n, \forall\, n \in \mathbb{N}$.
ii) $n! > e^{-n}n^n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

6. Considera la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, donde $a_n = 2^{-n}$ si n es impar y $a_n = 2a_{n-1}$ si n es par. Prueba: i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente. ii) $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$.

7. Si $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$ cumple $|a_{n+1} - a_n| \leq \dfrac{1}{n^2},\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, entonces $\{a_n\}$ converge.

8. Si $x \in [0,1]$ tiene una expansión decimal periódica, prueba que $x \in \mathbb{Q}$.

9*. La colección formada por todas las sucesiones $\{a_n\}$ tales que $a_n = 0$ o $a_n = 1,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, no es numerable.

10. Considera al intervalo $(0,1)$ como subespacio métrico de $\mathbb{R}$ y determina si la sucesión $\left\{\frac{1}{n+1}\right\}$ es convergente ahí.

11*. Si $A \subseteq \mathbb{R}$ sólo tiene puntos aislados, entonces A es numerable.

Para resolver y entregarse el jueves 29 de octubre, 2020

Segundo examen parcial: jueves 5 de noviembre, 4:30 pm

Sugerencias:

9*. Ten presente las expansiones en base 2.

11*. Ten presente el ejercicio 4.11.