TAREA 11: ANÁLISIS I

Según corresponda, prueba lo indicado.

Definición A las soluciones de una ecuación polinomial, esto es, de la forma

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$$

donde $n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0$ y los coeficientes $a_j,\ j = 1, \ldots, n$, son enteros, se les llama *números algebraicos*. Prueba:

1. i) Cualquier número racional es un número algebraico.

ii) $\sqrt{2}$ es un número algebraico.

iii) La colección de números algebraicos es contable.

2. Si $\{a_n\} \subseteq [0, \infty)$ es una sucesión tal que $a_n \to 0$, entonces existe otra sucesión $\{r_n\} \subseteq (0, \infty)$ tal que $r_n \to \infty$ y $r_n a_n \to 0$.

3. Sean $\{a_n\},\ \{b_n\} \subseteq \mathbb{R}$ sucesiones acotadas. Prueba i) o ii) siguientes:

i) $\liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n)$.

ii) $\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$.

4. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$.

5. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie absolutamente convergente y $\{b_n\}$ es una sucesión acotada, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ es absolutamente convergente.

6*. Analiza el comportamiento de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n} - 1)$.

7. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie. Supongamos que podemos hallar otra serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tal que $b_n \neq 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, y $\lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_n}{b_n}\right| = L \in \mathbb{R}$. Si $L \neq 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es absolutamente convergente, si, y sólo si, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también lo es.

8. Sea (M, d) un espacio métrico y definamos $D(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}$, para $x, y \in M$. Entonces:

i) D es una métrica acotada. (Así, cualquier $A \subseteq M$ es acotado bajo D.)

ii) $\{x_n\} \subseteq M$ converge a x bajo d si, y sólo si, lo hace bajo D.

9. Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio normado, entonces $d(x, y) := \|x - y\|$ define una métrica en X.

10*. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$. Entonces $|\langle x, y\rangle| = \|x\|\|y\|$ si, sólo si, x y y son linealmente dependientes.

Definición (Recordemos que $\mathcal{S}$ denota al espacio vectorial formado por las sucesiones reales). Si $s = \{a_n\} \in \mathcal{S}$, definimos $\|s\|_\infty := \sup\{|a_n| : n \in \mathbb{N}\}$ y $\ell^\infty := \{s \in \mathcal{S} : \|s\|_\infty < \infty\}$.

11. i) ℓ^∞ consta exactamente de las sucesiones (reales) que son acotadas.

ii) ℓ^∞ es un espacio vectorial y $\|\cdot\|_\infty$ es una norma en ℓ^∞.

Para entregarse el jueves 5 de noviembre, 2020

Sugerencias:

6*. Compara $\sqrt[n]{n} - 1$ con $\frac{1}{n}$.

10*. Una implicación es clara. Para la otra determina primero cuándo se cumple que $ab = \frac{a^2b^2}{2}$, donde $a, b \geq 0$. Después trata de usar esto en la demostración de la desigualdad de Schwarz; se puede suponer que $x \neq 0$.