ANALISIS I: TAREA 12

1. Sean $\{a_n\}, \{b_n\} \subseteq \mathbb{R}$. Si $\{a_n\}$ converge, prueba una de las igualdades:
i) $\liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n$.
ii) $\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$.

2. Analiza la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n} - 1)^4$.

3. Sean P y Q polinomios. Si $P(n) \neq 0, \forall\, n \in \mathbb{N}$ y grado$P$ = grado$\,Q + 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q(n)}{P(n)}$ no converge.

Definición Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge incondicionalmente*, si todos sus rearreglos convergen.

4. Si una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$, entonces converge incondicionalmente y todos sus rearreglos convergen a s.

5. Sea $x \in (0, 1)$. Si $x \in \mathbb{Q}$, entonces su expansión decimal es periódica.

6. Si M es un espacio métrico, entonces $|d(x, y) - d(a, b)| \leq d(x, a) + d(y, b)$, $\forall\, a, b, x, y \in M$.

7. Sea $A \subseteq M$. Si $x \in A^a$, entonces existe una sucesión $\{x_n\} \subseteq A$, tal que $x_n \to x$ y $x_n \neq x_m$ si $n \neq m$.

8. Sean $M \subseteq \mathbb{R}$ y $f : M \to \mathbb{R}$. Si existe $a \in M$ tal que f es de Lipschitz en $M \cap (-\infty, a]$ y en $M \cap [a, \infty)$, entonces f es de Lipschitz.

9. El producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ es una función continua.

10. Toda sucesión convergente en un espacio métrico es de Cauchy.

11. Toda sucesión de Cauchy en un espacio métrico es acotada.

12. Si X es un espacio de Banach, entonces toda serie en X que converge absolutamente, es convergente.

Para entregarse el viernes 13 de noviembre, 2020