ANALISIS I: TAREA 13

Cuando corresponda, prueba lo indicado. En cualquier caso M es un espacio métrico.

1. Sea $f : D \to B$. Entonces:
i) $f^{-1}(\bigcap_{\alpha \in J} B_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in I} f^{-1}(B_\alpha), \quad B_\alpha \subseteq B, \ \forall\, \alpha \in J.$
ii) $f(\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in I} f^{-1}(A_\alpha), \quad A_\alpha \subseteq D, \ \forall\, \alpha \in J.$

2. Si $a_{m,n} \geq 0, \ \forall\, m, n \in \mathbb{N}$, entonces $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n}$.

3. Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones en $\mathbb{R}$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 < \infty$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ es absolutamente convergente.

4. Sea P un polinomio tal que grado$P > 1$ y $P(n) \neq 0, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{P(n)}$ converge absolutamente.

5. (Continuidad de la métrica) Sean $\{a_n\}, \{b_n\}$ sucesiones en M y $a, b \in M$. Si $a_n \to a$ y $b_n \to b$, entonces $d(a_n, b_n) \to d(a, b)$.

6. Sea X un espacio normado. Entonces un conjunto $A \subseteq X$ es acotado si, y sólo si, existe un númer real $c > 0$ tal que $\|x\| \leq c, \forall\, x \in A$.

7. Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ tiene una infinidad de elementos y es acotado, entonces $A^a \neq \phi$.

8. Determina si la función $h(x) = \begin{cases} x \text{ sen} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ es continua. (Justifica tu respuesta.)

9. Para $x = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ definamos $\|x\|_1 := \sum_{k=1}^{n} |a_k|$. Prueba que $\|\cdot\|_1$ es una norma en $\mathbb{R}^n$.

10. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea χ_n la función característica del intervalo $(0, n)$. Encuentra $\chi = \lim_{n \to \infty} \chi_n$ y determina si la convergencia es uniforme.

11. Prueba que la función f dada por $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}\, nx}{n^2}$ está bien definida en $\mathbb{R}$ y es continua.

Definición Sean M y E espacios métricos, $D \subseteq M, \ f : D \to E$ y $p \in D^a$. Un punto $L \in E$ es *límite de $f(x)$ cuando x tiende a p*, si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d(L, f(x)) \ \leq \ \epsilon, \ \forall\, x \in D \cap B_\delta(p)'$.

Cuando ocurra lo anterior indicaremos que $L = \lim_{x \to p} f(x)$. Notemos que para considerar $\lim_{x \to p} f(x)$ no se requiere que f esté definida en p.

12. Sean M y E espacios métricos, $D \subseteq M$, $f : D \to E$ y $p \in D^a$. Si existe, $\text{lím}_{x \to p} f(x)$ es único.

Para entregarse el jueves 19 de noviembre, 2020