ANÁLISIS I: TAREA 14

Cuando corresponda, prueba lo indicado. Los conjuntos M y E siempre son espacios métricos.

1. Sea $\{A_\alpha : \alpha \in J\}$ una colección de conjuntos y A un conjunto. Entonces $(\cup_{\alpha\in J} A_\alpha) \cap A = \cup_{\alpha \in J}(A_\alpha \cap A)$.

Def. Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es *aditiva* si $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$.
2. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es aditiva, entonces $f(x) = xf(1), \forall\, x \in \mathbb{Q}$.

3. Sean $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, $a_n \neq 0$ y $c = \max\left\{1, \dfrac{|a_0| + \cdots + |a_{n-1}|}{|a_n|}\right\}$. Si x_0 es una raíz de P, entonces $|x_0| \leq c$.

4*. Supongamos que $a_n \geq 0, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Si $\sum_{n=1}^\infty a_n < \infty$, entonces existe una sucesión $\{r_n\}$ tal que $1 \leq r_n \leq r_{n+1}$, $r_n \to \infty$ y $\sum_{n=1}^\infty r_n a_n < \infty$.

5. En un espacio métrico puede suceder que $\overline{V_r(x)} \subsetneq B_r(x)$.

6. Sea $A \neq \phi$ y para $x, y \in A$ definamos $\rho(x,y) = 0$, si $x = y$ y $\rho(x,y) = 1$ si $x \neq y$. Entonces ρ es una métrica en A, llamada *métrica discreta*.

7. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si $f(r) = g(r), \forall\, r \in \mathbb{Q}$ y f, g son continuas, entonces $f = g$.

Definición La *función de Heaviside* es la función característica $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ del intervalo $[0, \infty)$.
8. Obtén una sucesión $\{f_n\}$, formada por funciones continuas $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que converja puntualmente a la función de Heaviside.

9. Encuentra el radio de convergencia R de la serie de potencias $\sum_{n=0}^\infty (-1)^n x^n$ y observa que cuando $|x| = R$ dicha serie puede converger o no.

10. El espacio de sucesiones convergentes c es un espacio de Banach.

11. Sea $f : M \to E$. Si $M = A \cup B$, A y B son conjuntos no-vacíos y cerrados, y las restricciones $f|_A$ y $f|_B$ son continuas, entonces f es continua.

12. (Criterio por sucesiones para la existencia de un límite.) Sean $D \subseteq M$, $p \in D^a$, $f : D \to E$ y $L \in E$. Entonces, $L = \lim_{x\to p} f(x)$ si, y sólo si, para cada sucesión $\{x_n\} \subseteq D\backslash\{p\}$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = p$, resulta $L = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$.

Para resolver y entregarse el jueves 26 de noviembre, 2020

Sugerencias:

4*. Considera una sucesión creciente $\{n(k)\} \subseteq \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=n(k)}^{\infty} a_n \leq 2^{-2k}$.)