**ANALISIS I: TAREA 15**

Cuando corresponda, prueba lo indicado. Los conjuntos $M$ y $E$ siempre son espacios métricos.

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función aditiva. Si $f$ es continua en 0, prueba que $f(x) = xf(1),\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

2. Una sucesión $\{x_n\} \subseteq M$ converge a $x \in M$ si, y sólo, para cualquier abierto $V \subseteq M$ tal que $x \in V$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in V,\ \forall\, n \geq N$. (Esto indica que la convergencia de sucesines es un concepto topológico.)

3. La unión finita de conjuntos acotados en $M$ es acotado.

4. Si $A \subseteq \mathbb{R}$, entonces el conjunto de sus puntos aislados es numerable.

5. Para cada $x > 0$ definamos $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x}{n^2 x + 1}$. Entonces $f$ está bien definida y es continua.

6. Sea $A$ un conjunto no-vacío y consideremos en $A$ su métrica discreta.

i) ¿Qué subconjuntos de $A$ son abiertos?

ii) ¿Cuáles son las funciones continuas $f : A \to E$.

7. Si $A \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto cerrado al cual pertenecen todos los números irracionales en $[0, 1]$, entonces $[0, 1] \subseteq A$.

**Definición** La *frontera* de $A \subseteq M$ es el conjunto $\overline{A} \cap \overline{A^c}$ y se denotará por Fr$A$. Así, un punto $p \in M$ pertenece a Fr$A$ si, y sólo si, para cada $r > 0$ se cumple que $V_r(p) \cap A \neq \phi$ y $V_r(p) \cap A^c \neq \phi$.

8. Consideremos a $\mathbb{R}$ con su métrica canónica. Encuentra $A^0, \overline{A}$ y Fr$A$, siendo $A = \mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3\}$.

9. Sea $s = \{x_n\}$ una sucesión en $M$. Si $s$ sólo tiene un número finito de valores distintos, entonces $s$ tiene una subsucesión convergente.

10. Supongamos que $K \subseteq V \subseteq M$. Si $K$ es compacto y $V$ es abierto, entonces existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subseteq V,\ \forall\, x \in V$.

11*. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $f(x) = x^{\frac{1}{n}}, x \geq 0$. Entonces $f$ es uniformemente continua.

12. (Criterio por límites para continuidad) Sean $f : M \to E$ y $x \in M^a$. Entonces $f$ es continua en $x$ si, y sólo si, $\lim_{y \to x} f(y) = f(x)$.

Para entregarse el jueves 3 de diciembre, 2020.

Sugerencias:

11*. Tarea 5.