ANALISIS I: TAREA 2

Prueba lo indicado; $a, b, c, d, h, x \in \mathbb{R}$.

1. Si $a < b$, construye una biyección $h : [a, b] \to [0, 1]$.

2. Sean $a > 0$ y $b > 0$. Entonces, $a < b$ si, y sólo si, $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$.

3. Si $0 \leq a \leq b$ y $0 \leq c \leq d$, entonces $ac \leq bd$.

4. i) Si $0 < a < 1$, entonces $0 < a^{n+1} < a^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.
ii) Si $1 < a$, entonces $a^n < a^{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

5. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $a, b \geq 0$. Entonces $a^n < b^n$ si, y sólo si, $a < b$.

6. Si $x \neq 1$, entonces $1 + x + \cdots + x^n = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

7. Si $m, n \in \mathbb{N}$, entonces $mn \in \mathbb{N}$.

8. Sea $h \geq -1$. Prueba la *desigualdad de Bernoulli*: $(1+h)^n \geq 1+nh$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Dados $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \mathbb{N}_0$ tales que $0 \leq k \leq n$, diremos que $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) := \frac{n!}{k!(n-k)!}$ es un *coeficiente binomial*.

9. Sea $n \in \mathbb{N}$.
i) Calcula $\left(\begin{array}{c} n \\ 0 \end{array} \right)$, $\left(\begin{array}{c} n \\ 1 \end{array} \right)$ y $\left(\begin{array}{c} n \\ 2 \end{array} \right)$, $\forall\, n \geq 2$
ii) Prueba el *triángulo de Pascal*:

$$\left(\begin{array}{c} n+1 \\ k \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} n \\ k-1 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right), 1 < k < n+1.$$

10. La ecuación $n^2 - mn - 1 = 0$ no tiene soluciones $m, n \in \mathbb{N}$.

Recuerda que un número entero m es *par*, si $m = 2k$, donde k es entero.

11. i) Si $m \in \mathbb{N}$, entonces m no puede ser par e impar simultáneamente.
ii) Si m y n son pares, entonces mn es par.
iii) Si m y n son impares, entonces mn es impar.

Para entregarse el martes 1 de septiembre, 2020