**ANALISIS I: TAREA 3**

1. Si $a < b$, encuentra una biyección $h : [a, b) \to (0, 1]$.

En los siguientes ejercicios prueba lo indicado.

2. La *fórmula del binomio de Newton*:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^k b^{n-k}, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

**Notación** El *máximo común divisor* de $p, q \in \mathbb{N}$ se denotará por $((p, q))$. Si $((p, q)) = 1$, entonces $p$ y $q$ son *primos relativos.*

3. Sean $p, q \in \mathbb{N}$ primos relativos. Si $n \in \mathbb{N}$ y $q$ divide a $p^n$ (en $\mathbb{N}$), entonces $q = 1$. (Sug.: Ya que $((q, p)) = 1$ existen $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $ap + bq = 1$.)

4. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto tal que si $x, y \in I$ y $x < t < y$, siempre se cumple que $t \in I$. Entonces $I$ es un intervalo.

5. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ conjuntos no-vacíos y acotados. Si $A \subseteq B$, entonces
$$\text{ínf}\, B \leq \text{ínf}\, A \leq \sup A \leq \sup B.$$

**Definición** Si $A \subseteq \mathbb{R}$, definimos $-A := \{-x : x \in A\}$.

6. Si $A \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto no vacío y acotado inferiormente, prueba que $\sup(-A) = -\,\text{ínf}(A)$.

7. i) Si $A \subseteq \mathbb{N}$ es no-vacío y está acotado superiormente (en $\mathbb{R}$), entonces $A$ tiene elemento máximo.

ii) Para cada $x \in \mathbb{R}$ existe $[x] := \text{máx}\{m \in \mathbb{Z} : m \leq x\}$.

8. Si $n \in \mathbb{N}$ es par, entonces cada número positivo tiene exactamente dos raíces $n$-ésimas.

9. Si $a, b \geq 0$, entonces $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$.

10. Si $r \in \mathbb{Q}$ y $r > 0$, entonces $\sqrt{2}$ siempre está entre $r$ y $\dfrac{r+2}{r+1}$.

11. El conjunto de números irracionales es denso en $\mathbb{R}$.

Para entregarse el martes 8 de septiembre, 2020.