ANALISIS I: TAREA 4

Prueba lo indicado.

Definición Sea X un conjunto arbitrario. La *función característica* (respecto de X) de $A \subseteq X$ se define como $\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \in X \setminus A. \end{cases}$

1. Encuentra χ_ϕ y $\chi_{\mathbb{R}}$.

2. Si $a, b \geq 0$, entonces $a^n + b^n \leq (a+b)^n, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Definición Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Para $k \in \mathbb{R}$ definimos $kA := \{kx : x \in A\}$.

3. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado.
i) Si $k \geq 0$, entonces $\sup(kA) = k \sup(A)$.
ii) Determina cómo es $\inf(kA)$ en este caso. (No es necesario probarlo.)

Definición Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$. Entonces

$$A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}, \quad c + A := \{c\} + A.$$

4. i) Si $A, B \subseteq \mathbb{R}$ son conjuntos no vacíos y están acotados superiormente, entonces $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.
ii) Si $A \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto no vacío y está acotado superiormente, entonces $\sup(c + A) = c + \sup(A), \ \forall\, c \in \mathbb{R}$.

5. Sean $a, b \geq 0$. Entonces $\sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$. Además, la desigualdad es estricta si $a \neq b$ y es una igualdad cuando $a = b$. (A $\sqrt{ab}$ se le llama *media geométrica* de a y b y $\frac{a+b}{2}$ es su *media aritmética*. La desigualdad anterior indica que la media geométrica siempre es menor o igual que la media aritmética.)

6. Sea $n \in \mathbb{N}$. Si $m \in \mathbb{N}$, entonces $\sqrt[n]{m} \in \mathbb{N}$ o $\sqrt[n]{m}$ es irracional.

7. Sean A, B, C y D conjuntos. Si $A \sim B$ y $C \sim D$, entonces $A \times C \sim B \times D$.

8. Sean $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ y $\{B_\alpha : \alpha \in I\}$ colecciones de conjuntos tales que $A_\alpha \cap A_\beta = \phi$ y $B_\alpha \cap B_\beta = \phi$ cuando $\alpha \neq \beta$. Si $A_\alpha \sim B_\alpha, \ \forall\, \alpha \in I$, entonces $\cup_{\alpha \in I} A_\alpha \sim \cup_{\alpha \in I} B_\alpha$.

9. Un conjunto A es finito si, y sólo si, siempre que $\varphi : A \to A$ es 1-1, resulta que φ es suprayectiva.

10. $(a, \infty) \sim (0, 1), \forall\, a \in \mathbb{R}$.

11. La colección de intervalos con extremos en $\mathbb{Q}$ es un conjunto contable.

Para entregarse el martes 15 de septiembre, 2020