ANALISIS I: TAREA 5

Prueba lo indicado.

1. Si $m, j \in \mathbb{N}$ y $1 \leq j \leq 2m$, entonces $\sqrt{m^2 + j}$ es irracional.

2*. Sea $n \in \mathbb{N}$. Si $x, y \geq 0$, entonces $|x^{\frac{1}{n}} - y^{\frac{1}{n}}| \ \leq \ |x - y|^{\frac{1}{n}}$.

3*. Si X es un conjunto no-vacío, entonces 2^X tiene la misma cardinalidad que la colección de las funciones $f : X \to \{0, 1\}$.

4. Si B es un conjunto infinito y $A \subseteq B$ es finito, entonces $B \setminus A \sim B$.

5. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no-vacío. Si $|x| \leq K, \ \forall\, x \in A$, entonces

$$\sup A - \text{ínf}\, A \leq 2K.$$

6. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Si $x, y \in [a, b]$, entonces $|x - y| \ \leq b - a$.

Notación Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $a \vee b := \text{máx}\{a, b\}$ y $a \wedge b := \text{mín}\{a, b\}$.

7. i) $a \vee b = \dfrac{a + b + |a - b|}{2}$.

ii) Determina para $a \wedge b$ una expresión similar a la expresión anterior para $a \vee b$. (No necesitas demostrarla.)

8. Prueba las propiedades básicas de la función distancia (proposición 1.4).

9. Prueba que $\text{lím}_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+3}} = 0$, usando:

i) la definición.

ii) el lema del sandwich.

10. La convergencia de $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$ implica la de $\{|a_n|\}$.

Definición Un *rearreglo* de una sucesión $\{a_k\}$ es otra sucesión $\{b_n\}$, donde $b_n = a_{h(n)}$ y $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una biyección.

11. Si $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$ es una sucesión que converge a L, entonces todos sus rearreglos también convergen a L.

Definición Dado un conjunto no-vacío A, denotaremos por $F(A; \mathbb{R})$ la colección de funciones $f : A \to \mathbb{R}$. En $F(A; \mathbb{R})$ definimos las operaciones de suma y producto con funciones de la forma usual:

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \quad (fg)(x) := f(x)g(x), \quad \forall\, x \in A.$$

12. Con las operaciones anteriores, $F(A; \mathbb{R})$ es un espacio vectorial (real).

Para entregarse el martes 22 de septiembre, 2020.
Examen parcial 1: **martes 29 de septiembre, 4:30 pm** .

Sugerencias:

2*. Supón que $x \geq y$ y trata de llevar la desigualdad dada a una desigualdad equivalente, pero en términos de elevar a la n y no de sacar raíz n-ésima.

3*. Ten presente las funciones características.