TAREA 6: ANALISIS I

Prueba lo indicado.

1*. (Algoritmo de la división para polinomios) Si P y $Q \neq 0$ son polinomios, entonces existen polinomios C y R tales que $P = CQ + R$, donde $R = 0$ o grado$R <$ grado$Q$.

2. Si A es un conjunto finito con n elementos, ¿cuántos elementos tiene 2^A? Justifica tu respuesta.

3. Si $n \in \mathbb{N}$ y $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, entonces $|x+x_1+\cdots+x_n| \geq |x|-|x_1|-\cdots-|x_n|$.

4. Considera sucesiones $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\} \subseteq \mathbb{R}$, tales que $a_n \leq b_n \leq c_n, n \in \mathbb{N}$. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$, entonces $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

5. Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones reales, y $a, b \in \mathbb{R}$. Si $a_n \to a$ y $b_n \to b$, entonces:

i) $a_n \vee b_n \to a \vee b$.

ii) $a_n \wedge b_n \to a \wedge b$. (Nada más realiza una de las demostraciones.)

6. Sea $k \in \mathbb{N}$. Encuentra $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\binom{n}{k}}{n^k}$.

7. Sea $k \in \mathbb{N}$ y $\{a_n\}$ tal que $a_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, entonces $\lim_{n\to\infty}(a_n)^{\frac{1}{k}} = a^{\frac{1}{k}}$.

8. Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones en $\mathbb{R}$, $b_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Si $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ y $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ es acotada, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

9. Calcula $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+2n} - n\right)$.

10. Si $a > b > 0$, encuentra $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n}$.

11. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $s_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $s_n(x) := 1 + x + \cdots + x^n$. Determina para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ converge la sucesión $\{s_n(x)\}$.

12. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $a_n = (n!)^{\frac{1}{n}}$. La sucesión $\{a_n\}$ es creciente y no es acotada.

Para entregarse el jueves 1 de octubre.

Sugerencias:

3*. Observa que el grado de un polinomio $P \neq 0$, es un número natural.

12. Para establecer que no es acotada, considera $(n!)^2$ y agrupa los factores adecuadamente para usar el ejercicio 1.12.