TAREA 7: ANALISIS I

Prueba lo indicado.

1. La familia de subconjuntos finitos de un conjunto numerable es numerable.

2. Sean $a_1, a_2 \in \mathbb{R},\ a_1 \neq 0$. Entonces $|a_1 + a_2| \ = |a_1| + |a_2|$ si, y sólo si, existe $c \geq 0$ tal que $a_2 = ca_1$.

3. Si $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$ es una sucesión que converge a $L \in \mathbb{R}$, entonces cualquiera de sus subsucesiones también converge a L.

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Recordemos que una función $f : A \to \mathbb{R}$ es *creciente* si para cualesquiera $a, b \in A$ tales que $a < b$, se cumple que $f(a) < f(b)$.

4. i) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es creciente si, y sólo si, $f(n) \leq f(n+1), \forall\, n \in \mathbb{N}$.

ii) Si $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es creciente, entonces $f(n) \geq n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

5. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Si $f : A \to B$ y $g : B \to \mathbb{R}$ son funciones crecientes, entonces $g \circ f$ también lo es.

Definición Si V es un espacio vectorial que no es de dimensión finita, definimos $\dim V = \infty$.

6. $\dim c_0 = \infty$.

7. Sean P y Q polinomios, $Q \neq 0$. Si P y Q tienen igual grado, encuentra $\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)}$.

8. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $f_n(x) = \frac{1}{1+nx^2}$. Encuentra para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ existe $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n$.

9. Sea $\{a_n\}$ la sucesión definida por $a_1 = 1$ y $a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n},\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

i) Verifica que $\{a_n\}$ es creciente y acotada.

ii) Calcula su límite.

10. Si $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$ es una sucesión de Cauchy, entonces $\{a_n\}$ es acotada.

11. Sean $a, b \in \mathbb{R}^*$. Si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$.

12. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números positivos. Entonces $a_n \to 0$ si, y sólo si, $\dfrac{1}{a_n} \to \infty$.

Para entregarse el jueves 8 de octubre, 2020