TAREA 8: ANALISIS I

Cuando corresponda, prueba lo indicado. Prueba lo indicado.

1. Las leyes de De Morgan:

i) $\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha^c$. ii) $\left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha^c$.

2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n(x) = \operatorname{sen}^n x,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$. Determina para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ converge la sucesión $\{f_n(x)\}$.

3. Si $P \neq 0$ es un polinomio cuyos coeficientes son todos positivos, entonces $\lim_{n\to\infty}(P(n))^{\frac{1}{n}} = 1$.

Definición Una sucesión $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$ *converge en el sentido de Cesàro*, si su sucesión de promedios $\{\sigma_n\}$, donde $\sigma_n := \dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$, es convergente

4. Encuentra una sucesión divergente que converja en el sentido de Cesàro.

5. Uno de los dos incisos del lema del sandwich en $\mathbb{R}^*$.

6. Una sucesión $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$ no está acotada inferiormente (en $\mathbb{R}$) si, y sólo si, tiene a $-\infty$ como un límite subsecuencial.

7.Sea $\{a_n\}\subseteq[0, \infty)$. Entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ si, y sólo si, $\limsup_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

8. Expresemos el conjunto contable $\{x \in \mathbb{Q} : -\sqrt{2} < x < 3\}$ como una sucesión $\{r_n\}$. Encuentra $\liminf_{n\to\infty} r_n$ y $\limsup_{n\to\infty}$.

Definición Una *serie telescópica* (en $\mathbb{R}$) es una serie que tiene la forma $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1})$, donde $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$ es una sucesión.

9. Una serie telescópica $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1})$ converge si, y sólo si, la sucesión $\{a_n\}$ converge.

10. Calcula $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{3n}$.

11*. La sucesión $\left\{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ es creciente y acotada.

Para entregar el jueves 15 de octubre, 2020

Sugerencias:

11*. Para verificar que es creciente desarrolla las dos potencias y observa que $\dfrac{(n+1)(n)\dots(n+1-k+1)}{(n+1)^k} \geq \dfrac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k}$, $1 \leq k \leq n$. Para establecer que es acotada nota que $k! \geq 2^{k-1}$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$.