TAREA 9: ANÁLISIS I

Cuando corresponda, prueba lo indicado.

1. Sea P un polinomio de grado $n \in \mathbb{N}$. Entonces $a \in \mathbb{R}$ es raíz de P si, y sólo si, $P(x) = (x-a)Q(x)$, para algún polinomio Q.

2. Si $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$ converge a $L \in \mathbb{R}$, prueba que su sucesión de promedios también converge a L.

3. Sean $\{a_n\}, \{b_n\} \subseteq \mathbb{R}$ y $a, b \in \{-\infty, \infty\}$. Si $a_n \to a$ y $b_n \to b$, entonces:

i) $a_n \vee b_n \to a \vee b$.

ii) $a_n \wedge b_n \to a \wedge b$. Nada más prueba uno de los casos.

4. Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\} \subseteq \mathbb{R}$ tales que $a_n \to a$ y $b_n \to b$. Si $a, b \in \{-\infty, \infty\}$, entonces $a_n b_n \to ab$. Nada más prueba uno de los casos.

5. Sea $\{b_n\}$ una sucesión convergente tal que $b_n \geq 0, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Entonces, para cualquier sucesión $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}^*$ se cumple:

i) $\operatorname{lím\,sup}_{n\to\infty} b_n a_n = \operatorname{lím}_{n\to\infty} b_n \operatorname{lím\,sup}_{n\to\infty} a_n$.

ii) $\operatorname{lím\,inf}_{n\to\infty} b_n a_n = \operatorname{lím}_{n\to\infty} b_n \operatorname{lím\,inf}_{n\to\infty} a_n$. Nada más prueba un caso.

6. Encuentra dos sucesiones acotadas, $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$, tales que

$$\operatorname{lím\,inf}_{n\to\infty}(a_n + b_n) \neq \operatorname{lím\,inf}_{n\to\infty} a_n + \operatorname{lím\,inf}_{n\to\infty} b_n.$$

7. Prueba los criterios de comparación para la convergencia de una serie.

8. Sea $r > 1$ un número real.

i) Calcula $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r-1}{r^n}$.

ii) Si $0 \leq a_n \leq r-1$, entonces $0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{r^n} \leq 1$.

9. Encuentra las dos primeras cifras decimales de e.

10. (Copo de nieve de Koch) Sea K_0 un triángulo equilátero cuyos lados miden 1. Dividamos cada lado de K_0 en tres partes y sobre cada segmento intermedio construyamos otro triángulo equilátero hacia el exterior de K_0. Obtenemos así una región R_1, cuyos lados tienen todos la misma longitud. Dividamos ahora cada uno de los lados de R_1 en tres partes de igual longitud y, como antes, sobre el segmento intermedio construyamos otro triángulo equilátero. Denotemos por R_n la región que se obtiene al repetir el procedimiento anterior n veces y sea P_n su perímetro y A_n su área. Determina si:

i) $\{P_n\}$ converge. ii) $\{A_n\}$ converge.

11. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie convergente. Si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \leq 0$ cuando $n \geq N$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente.

Para entregarse el jueves 21 de octubre, 2020