ANALISIS II: TAREA 1

Definición Una vez fijado un conjunto X, si $A \subset X$, entonces A^c denotará su complemento (respecto de X), esto es $A^c = \{x \in X : x \notin A\}$.

1. Sea $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ una colección de subconjuntos de X. Prueba la ley de De Morgan: $\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c$.

En particular, si $A, B \subset X$, nota que $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

Definición Sea f una función y A un conjunto. La *imagen inversa* de A bajo f es el conjunto $f^{-1}(A) \equiv \{x \in D(f) : f(x) \in A\}$, donde $D(f)$ es el dominio de f.

2. Sea $f : A \to B$ y $\{C_\alpha : \alpha \in I\}$ una colección de conjuntos. Prueba que $f^{-1}(\cap_{\alpha \in I} C_\alpha) = \cap_{\alpha \in I} f^{-1}(C_\alpha)$.

3. Prueba las propiedades indicadas del producto escalar en $\mathbb{R}^N$.

4. Prueba la ley del paralelogramo:
$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2),\ v, w \in \mathbb{R}^N.$$

5. Prueba el teorema de Pitágoras en $\mathbb{R}^N$.

6. Si $a_1, \ldots, a_n > 0$ prueba que $n^2 \leq (a_1 + \cdots a_n)(\frac{1}{a_1} + \cdots \ \frac{1}{a_n})$.

7. Encuentra el valor mínimo de la función
$$f(x) = \sqrt{(x-1)^2 + 9}\ +\ \sqrt{(x-8)^2 + 16},\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$
(Sug.: procede geométricamente.)

Definición Si $x = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^N$, definimos $\|x\|_\infty \equiv \text{máx}\{|a_1|, \ldots, |a_n|\}$.

8. Prueba que $\|\cdot\|_\infty$ es una norma en $\mathbb{R}^N$.

9. Bosqueja el conjunto $S(r) = \{u \in \mathbb{R}^2 : \|u\|_\infty = r\},\ r > 0$.

Si η es una norma en $\mathbb{R}^N$, prueba que:

10) $d(x, y) \equiv \eta(x - y)$ define una métrica.

11. $|\eta(x) - \eta(y)| \leq\ \eta(x - y),\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}^N$.

12. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo no vacío y $f : I \to \mathbb{R}$. Prueba que f es convexa si, y sólo si, $S \equiv \{(x, y) : x \in I,\ f(x) \leq y\} \subset \mathbb{R}^2$ es convexo.

Para revisar y entregarse el martes 5 de febrero.