

ANÁLISIS II: TAREA 2

1. Sea $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ una colección de subconjuntos de X . Prueba la ley de

De Morgan:
$$\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^c.$$

En particular, si $A, B \subset X$, nota que $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

2. Sea $f : D \rightarrow E$. i) Si A es cualquier conjunto, prueba que $f(f^{-1}(A)) \subset A$.

ii) Si $B \subset D$, prueba que $B \subset f^{-1}(f(B))$.

Definición Una combinación convexa de $u_1, \dots, u_m \in \mathbb{R}^N$ es una de la forma $t_1 u_1 + \dots + t_m u_m$, donde $t_1, \dots, t_m \geq 0$ y $t_1 + \dots + t_m = 1$.

3. Sea $K \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto convexo. Si $u_1, \dots, u_m \in K$, prueba que cualesquiera de sus combinaciones convexas también pertenece a K .

4. Sean $x, y \in \mathbb{R}^N, x \neq 0$. Prueba que $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ si, y sólo si, $y = \lambda x$ donde $\lambda \geq 0$.

5. Prueba que el límite de una sucesión convergente en \mathbb{R}^N es único.

6. Prueba que toda sucesión convergente en \mathbb{R}^N es de Cauchy.

7. Prueba que toda sucesión de Cauchy en \mathbb{R}^N es acotada.

8. Si $\{u_k\} \subset \mathbb{R}^N$ y $\{c_k\} \subset \mathbb{R}$ son sucesiones convergentes, prueba que $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k u_k = \lim_{k \rightarrow \infty} c_k \lim_{k \rightarrow \infty} u_k$.

9. Sea $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^N$. Si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ converge, prueba que $x_k \rightarrow 0$.

10. Sea $A \subset \mathbb{R}^N, p \in \mathbb{R}^N$. Prueba que $p \in A^a$ si, y sólo si, existe una sucesión $\{p_k\} \subset A$ tal que $p_k \rightarrow p$ y los puntos p_k son distintos entre sí.

11. Determina si la norma $\|\cdot\|_\infty$ en \mathbb{R}^2 satisface la ley del paralelogramo. (Justifica tu respuesta.)

12. Sea η una norma en \mathbb{R}^N . Prueba que existe $C > 0$ de manera que $\eta(u) \leq C\|u\|, \forall u \in \mathbb{R}^N$. (Sug.: considera una base para \mathbb{R}^N .)

Para revisarse y entregarse el jueves 14 de febrero.