ANALISIS II: TAREA 3

1. Sean A y D conjuntos, y $f : D \to A$. Si $B \subset A$, prueba que $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$.

2. En cada inciso del ejercicio 2.2 señala una función y un conjunto donde la contención correspondiente sea propia.

Definición Si $k \in \mathbb{R}$ y $A \subset \mathbb{R}^N$, definimos $kA \equiv \{kx : x \in A\}$.

3. Sea $K \subset \mathbb{R}^N$. Si K es convexo y $2K \subset K$, prueba que K es cerrado bajo la suma.

4. Determina si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, donde $x_n = (\frac{\cos n}{n^{\frac{3}{2}}}, \frac{\operatorname{sen} n}{n^2})$, $\forall n \in \mathbb{N}$, es convergente.

5. Sea $A \subset \mathbb{R}^N$. Si A es infinito y acotado, prueba que A^a es no-vacío. (Sug.: considera el teorema de Bolzano-Wierstrass.)

6. Prueba el criterio por sucesiones para la existencia del límite de una función.

7. Determina para qué valores de $r > 0$ existe $\lim_{(x,y)\to 0} \frac{xy}{(x^2+y^2)^r}$.

8. Prueba (iv) en el lema sobre el álgebra de límites.

9. Si $\eta : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es una norma, prueba que η es continua.

10. Prueba el criterio por componentes para la continuidad de f en p.

11. Definamos $P : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^3$ por $P(x, y) = x \times y$ (producto vectorial). Prueba que P es continua.

Definición Si $x = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^N$, definimos $\|x\|_1 \equiv \sum_{k=1}^{N} |a_k|$.

12. Prueba que $\|\cdot\|_1$ es una norma en $\mathbb{R}^N$.

Para revisar y entregarse el jueves 21 de febrero.