ANALISIS II: TAREA 4

1. Si $A \subset \mathbb{R}^M$ y $B \subset \mathbb{R}^N$ son acotados, prueba que $A \times B \subset \mathbb{R}^{M+N}$ también lo es.

Definición Una función $f : K \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es *convexa*, si K es convexo y para $x, y \in K$, se cumple que $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y),\ \forall\, t \in [0,1]$.

2. Sea $K \subset \mathbb{R}^N$. Si $f, g : K \to \mathbb{R}$ son funciones convexas, prueba que también lo son $f + g$ y $\lambda f,\ \forall\, \lambda \geq 0$.

3. Sea $c > 0$ y $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un polinomio. Prueba: i) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{P(x)}{e^{cx}} = 0$. (Sug.: $\lim_{u\to\infty} \dfrac{u}{e^u} = 0$. ii) La función $f(x) \equiv \dfrac{P(x)}{e^{cx}}, \forall\, x \geq 0$ es acotada.

En los ejercicios 4 y 5, $\{p_j\} \subset (0,\infty)$ es una sucesión tal que $\sum_{j=1}^{\infty} p_j < \infty$.

4. i) Para cualquier sucesión $\{s_j\} \subset (0,\infty)$, prueba que la serie $\sum_{j=1}^{\infty} e^{-s_j x} p_j$ converge $\forall\, x \geq 0$. ii) Existe una sucesión $\{s_j\} \subset (0,\infty)$ tal que la serie $\sum_{j=1}^{\infty} e^{-s_j x} p_j$ diverge $\forall\, x < 0$.

5. Para cualquier sucesión $\{s_j\} \subset (0,\infty)$ y $c > 0$, prueba que la serie $\sum_{j=1}^{\infty} e^{-s_j x - \frac{s_j^2}{c^2}} p_j$ converge $\forall\, x \in \mathbb{R}$. (Sug.: recuerda que $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}, \forall\, a, b \in \mathbb{R}$.)

6. Prueba que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \max\{x, y\}$ es continua.

7. Si $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ es un isomorfismo, prueba que existe $C > 0$ tal que $\|Tx\| \geq C\|x\|,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^N$.

8. Muestra que una función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ puede no preservar abiertos.

9. Si $A = \mathbb{R} \setminus \{1,2,3\}$, encuentra (geométricamente) A^a, A^0 y $\overline{A}$. Además, señala si A es abierto o cerrado.

10. Sea $A \subset \mathbb{R}^N$. Prueba que A es cerrado si, y sólo si A^c es abierto.

11. Bosqueja el conjunto $S(r) = \{u \in \mathbb{R}^2 : \|u\|_1 = r\},\ r > 0$.

12. Determina si para la norma $\|\cdot\|_1$ se cumple la propiedad indicada en el ejercicio 2.4.

Para revisar y entregarse el jueves 28 de febrero.