ANALISIS II: TAREA 5

1. Si $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es lineal, prueba que existe un único $u \in \mathbb{R}^N$ tal que $\varphi(x) = \langle x, u \rangle, \ \forall\, x \in \mathbb{R}^N$.

Definición El *complemento ortogonal* de $A \subset \mathbb{R}^N$ es el conjunto $A^\perp \equiv \{x \in \mathbb{R}^N :< a, x >= 0, \ \forall\, a \in A\}$.

2. Prueba que $A^\perp$ es un subespacio vectorial, $\forall\, A \subset \mathbb{R}^N$.

3. Sea $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$. Si T es lineal y $K \subset \mathbb{R}^M$ es convexo, prueba que $T^{-1}(K)$ es convexo.

4 . Sea $\{x_m\}$ un sucesión en $\mathbb{R}^N$. Tomemos $x_0 = 0$ y supongamos que $\{a_m\} \subset [0, \infty)$ es tal que $\|x_m - x_{m-1}\| \leq a_m, \forall\, m \in \mathbb{N}$. Si la serie $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$ converge, prueba que $\{x_m\}$ converge y que $\|\text{lím}_{m\to\infty} x_m\| \leq \sum_{m=1}^{\infty} a_m$.

5. Sean $\{p_j\}$ y $\{s_j\}$ tales que $p_j > 0, \ s_j \geq 0, \ \forall\, j \in \mathbb{N}$ y $\sum_{j=1}^{\infty} p_j < \infty$. Prueba que la función f definida por $f(x) \equiv \sum_{j=1}^{\infty} e^{-s_j x} p_j, \ \forall\, x \geq 0$, es continua.

6. Sea $\pi_j : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ la proyección sobre el eje x_j, esto es $\pi_j(x_1, \ldots, x_N) \equiv x_j$, donde $j = 1, \ldots, N$. Prueba que π_j preserva abiertos. (Sug.: ten presente los rectángulos abiertos.)

7. Prueba las propiedades básicas de los conjuntos cerrados.

8. Prueba que A^a es cerrado, $\forall\, A \subset \mathbb{R}^N$.

9. Sea $p \in \mathbb{R}^N$, $r > 0$ y tomemos $W = \{x \in \mathbb{R}^N : \|x - p\| > r\}$. Encuentra W^0, $\overline{W}$ y $\operatorname{Fr} W$. (Justifica tu respuesta.)

10. Sea $A \subset \mathbb{R}^N$. Prueba que A es abierto y cerrado si, y sólo si, $\operatorname{Fr} A = \emptyset$.

11. Sea $S = \{u \in \mathbb{R}^N : \|u\| = 1\}$. Encuentra $d(x) \equiv \text{dist}\ (x, S), \ \forall\, x \in \mathbb{R}^N$. (Justifica tu respuesta.)

Notación $\mathcal{M}(M \times N)$ denotará el espacio de las matrices (reales) de tamaño $M \times N$ y se identificará con $\mathbb{R}^{M\times N}$.

12. Sea $A \in \mathcal{M}(M \times N)$, $B \in \mathcal{M}(N \times K)$ y $x \in \mathbb{R}^N$ (considerado como matriz $N \times 1$). Prueba: i) $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$. ii) $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$. iii) Si $N = M$, entonces $\|A^j\| \leq \|A\|^j, \ \forall\, j \in \mathbb{N}$.

Para revisar y entregarse el jueves 6 de marzo, 2008.