ANALISIS II: TAREA 6

1. Si $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ es lineal, prueba que T preserva conjuntos convexos.

2. Sea $A = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : |u| \leq 1, |v| \leq 1\}$. Encuentra $\operatorname{dist}(x, A), \forall\, x \in \mathbb{R}^2$.

3. Si $H \subset \mathbb{R}^N$ es un hiperplano, prueba que H es convexo y cerrado. (Sug.: si H está definido mediante $u \in \mathbb{R}^N$, considera $f(x) = \langle x, u\rangle$.)

4. Calcula la distancia del punto $P = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ al plano generado por los vectores $(-1, 0, 1)$ y $(0, 1, 1)$.

5. Supongamos que $a_n \geq 0, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, prueba que existe una sucesión $\{r_n\}$ tal que $1 \leq r_n \leq r_{n+1},\ r_n \to \infty$ y $\sum r_n a_n < \infty$.

6. Sean $\{p_j\}$ y $\{s_j\}$ sucesiones como en el ejercicio 5.5. i) Prueba que la serie (de "derivadas") $\sum_{j=1}^{\infty} -s_j e^{-s_j x} p_j$ converge $\forall\, x > 0$. ii) Señala un ejemplo de sucesión $\{s_j\}$ donde la serie en i) no converja cuando $x = 0$.

Notación $\mathcal{M}(m \times n)$ denotará el espacio de las matrices (reales) de tamaño $m \times n$ y se identificará con $\mathbb{R}^{mn}$. En particular, $\mathcal{M}(m \times n)$ cuenta con la norma euclidiana correspondiente. Como es usual, $\mathcal{M}(n) \equiv \mathcal{M}(n \times n)$.

7. Sea $A \in \mathcal{M}(m \times n)$, $B \in \mathcal{M}(n \times k)$ y $x \in \mathbb{R}^n (= \mathcal{M}(n \times 1))$. Prueba: i) $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$. ii) $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$. iii) Si $n = m$ y $j \in \mathbb{N}$, entonces $\|A^j\| \leq \|A\|^j$.

8. Sea $A \in \mathcal{M}(n)$. i) Prueba que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$ converge. Definamos $e^A \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$. ii) Prueba que $\|e^A\| \leq e^{\|A\|}$.

9. Sea $p \in \mathbb{R}^N, r > 0$. Prueba que (la "esfera") $S = \{x \in \mathbb{R}^N : \|x - p\| = r\}$ es un conjunto compacto.

10. Si $A \subset \mathbb{R}^M$ y $B \subset \mathbb{R}^N$ son compactos, prueba que $A \times B \subset \mathbb{R}^{M+N}$ es compacto.

11. Determina el interior del conjunto de Cantor. (Justifica tu respuesta.)

Definición Sean $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ normas en $\mathbb{R}^N$. Diremos que $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son *equivalentes*, si existen $C > 0$ y $K > 0$ tales que $C\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq K\|x\|_1$, $x \in \mathbb{R}^N$. En tal caso indicaremos que $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$.

12. Prueba que $\sim$ define una relación de equivalencia en el conjunto de normas en $\mathbb{R}^N$.

Para revisar y entregarse el jueves 3 de abril, 2008.