ANALISIS II: TAREA 7

1. Sean $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ normas equivalentes en $\mathbb{R}^N$, $\{x_m\} \subset \mathbb{R}^N$ y $x \in \mathbb{R}^N$. Si $\{x_n\}$ converge a x bajo $\|\cdot\|_1$, prueba que también converge a x bajo $\|\cdot\|_2$.

2. Consideremos $\mathcal{M}(n) = \mathbb{R}^{n^2}$ y definamos la función $P : \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}^{n^2}$ por $P(A, B) = AB$. Prueba que P es continua.

NotaciónEl conjunto de valores propios de $M \in \mathcal{M}(n)$ se denotará por $\sigma(M)$.

3. Si $M \in \mathcal{M}(n)$, prueba que $|\lambda| \leq \|M\|$, $\forall\, \lambda \in \sigma(M)$.

4. Prueba que los abiertos en $D \subset \mathbb{R}^N$ tienen propiedades similares a las propiedades básicas de los abiertos en $\mathbb{R}^N$.

Definición Un conjunto $K \subset \mathbb{R}^N$ es *compacto relativo* si de cualquier cubierta de K formada por conjuntos abiertos en K, es posible extraer una subcubierta finita.

5. Prueba que $K \subset \mathbb{R}^N$ es compacto si, y sólo si, K es compacto relativo.

6. Sea $A \subset \mathbb{R}^N$ no-vacío y $x \in \mathbb{R}^N$. Si A es cerrado, prueba que existe $p \in A$ tal que $\operatorname{dist}(x, A) = \operatorname{dist}(x, p)$.

Definición La *gráfica* de una función $f : A \to B$ es $\{(x, f(x)) : x \in A\} \subset A \times B$ y se denotará por $G(f)$.

7. Sea $A \subset \mathbb{R}^N$. Si $f : A \to \mathbb{R}^M$ es continua y A es compacto, prueba que su gráfica $G(f)$ es un conjunto compacto.

Definición Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^N$ es *perfecto* si $A = A^a$.

8. Prueba que el conjunto de Cantor K es perfecto.(Sug.: si x es un extremo de alguno de los subintervalos que forman K_n, nota que $x \in K$.)

9. Prueba que la función $f(x, y) = xy$, $\forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2$, no es uniformemente continua.

10. Sea $K \subset \mathbb{R}^N$ no-vacío y definamos $F(x) \equiv \max\{\langle x, a\rangle : a \in K\}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^N$. Prueba que F es continua.

11. Sean $\{p_j\}$ y $\{s_j\}$ sucesiones como en el ejercicio 5.5. Prueba que la función f definida por $f(x) \equiv \sum_{j=1}^{\infty} s_j e^{-s_j x} p_j$, $\forall\, x > 0$, es continua.

12. Sean $\{p_j\}$ y $\{s_j\}$ sucesiones como en el ejercicio 5.5. i) Prueba que la serie (de "n-ésimas derivadas") $\sum_{j=1}^{\infty} s_j^n e^{-s_j x} p_j$ converge $\forall\, x > 0$.

Para revisar y entregarse el jueves 10 de abril, 2008.