ANALISIS II: TAREA 8

1. Sea $A \subset \mathbb{R}^N$ y $f : A \to \mathbb{R}^M$. Si f es continua y A es cerrado, prueba que su gráfica $G(f)$ es un conjunto cerrado.

Definición Si $A, B \subset \mathbb{R}^N$, entonces $A + B \equiv \{x + y : x \in A, y \in B\}$.

2. Si $A, B \subset \mathbb{R}^N$ son compactos, prueba que $A + B$ también es compacto.

3. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\mathcal{A} \equiv \{A \in \mathcal{M}(n) : \lambda \text{ es valor propio de } A\}$. i) Señala un elemento de A. ii) Prueba que A es cerrado.

Notación Denotaremos por $GL(n)$ el subconjunto de $\mathcal{M}(n \times n)$ formado por las matrices invertibles.

4. Sea I la matriz identidad en $\mathcal{M}(n)$ y $A \in \mathcal{M}(n)$. Si $\|A\| < 1$, prueba que $I + A \in GL(n)$.

5. Determina si la función definida por $f(x) = x\ \operatorname{sen} x,\ x \in \mathbb{R}$, es uniformemente continua.

6. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es continua, prueba que f no es $1 - 1$.

7. Sea $f((x, y)) = x^2 - y^2,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Determina para qué valores de $c \in \mathbb{R}$, el conjunto $f^{-1}(c)$ es conexo. (Justifica tu respuesta.)

8. Si $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ es continua, prueba que f preserva conjuntos arcoconexos.

9. Sean A, B, C y D conjuntos. Si $A \sim B$ y $C \sim D$, prueba que $(A \times C) \sim (B \times D)$.

10. Sean A y B conjuntos finitos. Si A tiene m elementos y B tiene n elementos, determina cuántos tiene $A \times B$. (Justifica tu respuesta.)

11. Sean A y B conjuntos tales que $A \sim B$. Si $a \in A$ y $b \in B$, prueba que $A \setminus \{a\} \sim B \setminus \{b\}$.

12. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$. Prueba: i) $[a, b] \sim [0, 1]$. ii) $(a, b) \sim (0, 1)$. iii) $[a, b) \sim [0, 1)$. iv) $[a, b) \sim (a, b]$.

13. Sean $\{p_j\}$ y $\{s_j\}$ sucesiones como en el ejercicio 5.5. i) Prueba que la serie (de "n-ésimas derivadas") $\sum_{j=1}^{\infty} {s_j}^n e^{-s_j x} p_j$ converge $\forall\, x > 0$.

Para revisar y entregarse el jueves 17 de abril, 2008.