**ANALISIS II: TAREA 9**

**Definición** Sea $A \in \mathcal{M}(n)$ y expresemos $A = [a_{i,j}]$. Diremos que $A$ es una matriz *diagonal* si $a_{i,j} = 0$ cuando $i \neq j$.

1. Prueba que $\{A \in \mathcal{M}(n) : A \text{ es diagonal }\}$ es cerrado.

2. Encuentra la distancia de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ a $\{M \in \mathcal{M}(2) : \det M = 0\}$.

3. Si $V, W \subset \mathbb{R}^N$ son abiertos y densos, prueba que $V \cap W$ también es abierto y denso.

4. Encuentra una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sea discontinua y cuya gráfica sea un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^2$.

**Definición** Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es *periódica*, si existe $p > 0$ tal que $f(x + p) = f(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}$. En este caso, a $p$ se le llama un *periodo* de $f$.

5. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y periódica, prueba que $f$ es uniformemente continua. (Sug.: Usando la periodicidad, a partir de que $f$ es uniformemente continua en $[0, p]$, prueba que $f$ es uniformemente continua.)

6. Sea $A \subset \mathbb{R}^N$. Si $A$ es conexo, prueba que $\overline{A}$ también lo es.

7. Sea $D \subset \mathbb{R}^N$ y $f : D \to \mathbb{R}^M$ continua. Prueba que $D$ es conexo si, y sólo si, $G(f)$ lo es.

8. Sea $S^1 \equiv \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$. Si $f : S^1 \to \mathbb{R}$ es continua, prueba que existe $p \in S^1$ tal que $f(p) = f(-p)$. (Sug.: observa que $f(p) = f(-p)$ si, y sólo si, $f(p) - f(-p) = 0$.)

9. Sean $A$ y $B$ conjuntos. Supongamos que $I \neq \emptyset$ y $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$, $\{B_\alpha : \alpha \in I\}$ son colecciones de conjuntos tales que $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset,\ B_\alpha \cap B_\beta = \emptyset$ cuando $\alpha \neq \beta$ y $A = \cup_{\alpha \in I} A_\alpha,\ B = \cup_{\alpha \in I} B_\alpha$. Supongamos que, para cada $\alpha \in I$, existe una biyección $f_\alpha : A_\alpha \to B_\alpha$. Definamos ahora $f : A \to B$ por $f(x) = f_\alpha(x)$ si $x \in A_\alpha$. Prueba que $f$ es una biyección.

10. Prueba que $[1, \infty) \sim (1, \infty)$ .

11. Prueba que la colección de intervalos con extremos racionales es un conjunto contable.

12. Expresemos el conjunto contable $\{x \in \mathbb{Q} : -\sqrt{2} < x < 3\}$ como una sucesión $\{r_n\}$. Encuentra entonces $\liminf_{n\to\infty} r_n$ y $\limsup_{n\to\infty}$.

Para entregar y revisarse el jueves 24 de abril, 2008.