ANALISIS II: TAREA 10

1. Si $V \subset \mathbb{R}^N$ es un subespacio vectorial y $\dim V < N$, prueba que $V^0 = \emptyset$.

Definición Sean $A, B \subset \mathbb{R}^N$. La *distancia* entre A y B es $d(A, B) \equiv \text{ínf}\{d(x, y) : x \in A,\ y \in B\}$.

2. Sean $A, B \subset \mathbb{R}^N$. Si $A \cap B = \emptyset$ y A y B son conjuntos compactos, prueba que $d(A, B) > 0$.

3. Sea $f : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^N$. Si $G(f)$ es cerrado y f es acotada, prueba que f es continua.

4. Prueba que $GL(n)$ es denso en $\mathcal{M}(n)$. (Sug.: Si $A \in \mathcal{M}(n)$ considera la función $f(\lambda) = A - \lambda I$ y que A tiene un número finito de valores propios.)

5. Sea $A \equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq \frac{2}{\pi},\ y = \text{sen}\,\frac{1}{x}\},\ B \equiv \{(0, y) : |y| \leq 1\}$. Prueba que $A \cup B$ es conexo.

Definición Sean $A \subset \mathbb{R}^N$ y $B \subset \mathbb{R}^M$. Un *homeomorfismo* de A en B es una biyección $h : A \to B$ que es continua y cuya función inversa h^{-1} también es continua. En tal caso, se dice que A y B son *homeomorfos*.

6. Determina si $B \equiv \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\}$ y $S \equiv \{u \in \mathbb{R}^2 : \|u\| = 1\}$ son homeomorfos.

7. Determina si $\frac{1}{4}$ pertenece al conjunto de Cantor.

Definición Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^N$ es *perfecto* si $A = A^a$.

8. Prueba que el conjunto de Cantor K es perfecto.(Sug.: si x es un extremo de alguno de los subintervalos que forman K_n, nota que $x \in K$.)

9. Prueba: i) $(0, 1) \sim [0, 1)$. ii) $[0, 1) \sim [0, 1]$.

10. Si $f : [1, \infty) \to (1, \infty)$ es una biyección, prueba que f no es continua. (Sug.: considera la restricción de f a $(1, \infty)$.)

11. Si $r > 0$ y $p \in \mathbb{R}^N$, prueba que la bola $V_r(p)$ es no-numerable.

Definición Sea X un conjunto (considerado como "universo") y $A \subset X$. La *función característica* de A es entonces $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ definida por $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$, y $\chi_A(x) = 0$ si $x \notin A$.

12. Sean $a, b, p \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ y $p \in [a, b]$. Prueba que $\chi_{\{p\}}$ es integrable en $[a, b]$ y calcula su integral.

Para revisar y entregarse el martes 6 de mayo, 2008.