ANALISIS II: TAREA 11

1. Sea $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ y supongamos que $A, B \subset \mathbb{R}^N$ son conjuntos cerrados tales que $\mathbb{R}^N = A \cup B$. Si las restricciones $f|_A$ y $f|_B$ son continuas, prueba que f es continua.

2. Sean $f, g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$. Si f y g son continuas, $D \subset \mathbb{R}^N$ es denso y $f(x) = g(x), \forall\, x \in D$, prueba que $f = g$.

3. Encuentra conjuntos cerrados $A, B \subset \mathbb{R}$ tales que $A \cap B = \emptyset$ y $d(A, B) = 0$.

Definición El *soporte* de una función $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ es la cerradura (en $\mathbb{R}^N$) del conjunto $\{x \in \mathbb{R}^N : f(x) \neq 0\}$ y se denotará por sop$f$.

4. Sean $f, g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M,\ k \in \mathbb{R}$. Si f y g tienen soporte compacto, prueba que kf y $f + g$ también.

5. Prueba que $GL(n)$ no es un conjunto conexo. (Sug.: analiza la función determinante, definida en $GL(n)$.)

6. Si $A \subset \mathbb{R}^N$ es abierto y cerrado, prueba que $A = \emptyset$ o $A = \mathbb{R}^N$.

7. Si $A \subset \mathbb{R}^N$ es no-numerable, prueba que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $B_k(0) \cap A$ es no-numerable.

7. Prueba que existe una recta horizontal $R \subset \mathbb{R}^2$ que no intersecta a $\mathbb{Q}$

9. Sea $A \subset \mathbb{R}^N$. Si A es numerable, prueba que su complemento A^c es denso.

10. Sea χ la función característica de $\mathbb{Q}$. Prueba que la función definida por $f(x) \equiv x\chi(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}$, no es integrable en [0,1].

11. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Si f es acotada y es discontinua sólamente en un punto $p \in [a, b]$, prueba que f es integrable.

12. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Si $f \geq 0$, f es continua y $\int_a^b f = 0$, prueba que $f = 0$.

Para revisar y entregarse el martes 13 de mayo, 2008.

Segundo examen parcial: viernes 15 de mayo, 12:30 hrs.