ANALISIS II: TAREA 12

1. Si $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ es continua y su soporte es compacto, prueba que f es uniformemente continua.

2. Sea $A \subset \mathbb{R}^N$. Prueba que el conjunto de puntos aislados en A es numerable. (Sug.: observa que la colección $\{V_r(x) : x \in \mathbb{Q}^N, r \in \mathbb{Q}^+\}$ es numerable}.)

3. Sea $A \subset \mathbb{R}^N$ numerable y $R \subset \mathbb{R}^N$ una recta. Prueba que para cada $p \in A^c$ existe un segmento S que va de p a R, tal que $S \subset A^c$.

4. Sean $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$ y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Consideremos una sucesión $\{p_n\}$ tal que $a = p_0 < p_1 < \ldots < p_n < \ldots < b$ y $\lim_{n\to\infty} p_n = b$. Prueba: i) $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{p_{n-1}}^{p_n} f = \int_a^b f$. ii) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{p_{n-1}}^{p_n} f$ converge absolutamente.

5. Calcula $\int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx dx,\ \forall\, n, m \in \mathbb{N}$.

6. Sea $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ y $K : [a, b]^2 \to \mathbb{R}$ una función continua. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función integrable, definamos $Tf(x) = \int_R K(x, s)f(s)ds,\ \forall\, x \in [a, b]$. i) Observa que Tf está bien definida. ii) Prueba que $Tf : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua. (Sug.: K es uniformemente continua.)

7. Prueba que $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2+n^2} = \frac{\pi}{4}$. (Sug.: considera $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$.)

8. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua, calcula la derivada de $g(t) \equiv \int_0^{t^2} f(s)ds,\ \forall\, t \in \mathbb{R}$.

9. Sea f definida por $f(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x^2}$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$. Prueba que f' no es acotada en $[0, 1]$ y , por consiguiente, $f' \notin R[0, 1]$.

10. Determina si el límite de una sucesión de funciones convexas es una función convexa.

Definición La *función de Heaviside* es la función característica $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ del intervalo $[0, \infty)$.

11. Construye una sucesión $\{f_n\}$ tal que cada $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y $\{f_n\}$ converge a la función de Heaviside.

Definición Sea D un conjunto. Una familia $\mathcal{F} \subset F(D, \mathbb{R}^N)$. es *uniformemente acotada* si existe $C > 0$ tal que $\|f_\alpha(x)\| \leq C,\ \forall x \in D, \forall f \in \mathcal{F}$.

12. Sea D un conjunto y $f, f_n : D \to \mathbb{R}^N,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Supongamos que cada f_n es acotada. Si $f_n \overrightarrow{\rightarrow} f$, prueba: i) f es acotada. ii) $\{f_n\}$ es uniformemente acotada.

Para revisar y entregarse el martes 20 de mayo, 2008