

ANÁLISIS II: TAREA 13

Definición Una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es *continua por pedazos*, si existe una partición $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ de $[a, b]$ tal que: a) f es continua en cada $x \in [a, b] \setminus P$. b) En cada $x = x_k$, $k = 0, \dots, n$, existen los límites laterales.

1. Señala un función $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ que sea continua por pedazos y que no sea continua.

2. Sean $A, B \subset \mathbb{R}^N$ conjuntos cerrados y disjuntos entre sí. Tomemos $g(x) \equiv d(x, A)$, $h(x) \equiv d(x, B)$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$. i) Verifica que $g(x) + h(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$. ii) Si $f \equiv \frac{g}{g+h}$, prueba que f es continua, $0 \leq f \leq 1$, $f(A) = 0$ y $f(B) = 1$.

3. Sea $A \subset \mathbb{R}^N$ tal que para cada $x, y \in A$ existe un conjunto conexo $C_{x,y} \subset A$ tal que $x, y \in C_{x,y}$. Prueba que A es conexo.

4. Sea $A \subset \mathbb{R}^2$. Si $A \subset \mathbb{R}^2$ es contable, prueba que $\mathbb{R}^2 \setminus A$ es conexo. (Sug.: considera el ejercicio 12.3.)

5. Sea $A \subset \mathbb{R}^N$. Si A es no-numerable, prueba que A^a es no-numerable.

6. Una definición de la función *logaritmo natural* es $\ln x \equiv \int_1^x \frac{1}{s} ds$, $\forall x > 0$. A partir de esta definición, prueba: a) $\ln 1 = 0$. b) $\ln$ es creciente. c) $\ln x < 0$ si $0 < x < 1$ y $\ln x > 0$ si $x > 1$. d) $\ln xy = \ln x + \ln y$, $\forall x, y > 0$. e) $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$, $\forall x > 0$. f) $\ln x \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow \infty$. g) $\ln x \rightarrow -\infty$ cuando $x \rightarrow 0^+$. h) El rango de $\ln$ es $\mathbb{R}$.

7. Sean $c, d \in \mathbb{R}$, $c < d$ y $u : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 . Si f es continua en el intervalo $\{u(t) : t \in [c, d]\}$. Prueba que $\int_c^d f(u(t)) u'(t) dt = \int_{u(c)}^{u(d)} f(x) dx$.

8. Prueba que $\int_0^1 x^n (1-x)^m dx = \frac{n! m!}{(n+m+1)!}$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$.

9. (Derivación bajo la integral) Sea $f : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 , y definamos $G(y) = \int_a^b f(x, y) dx$, $\forall y \in \mathbb{R}$. Prueba que $G'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$, $\forall y \in \mathbb{R}$.

10. Prueba que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x}$ no converge uniformemente en $(0, \infty)$.

11. Sea $D \subset \mathbb{R}^N$, $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}^M$ continua, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\{x_n\} \subset D$ y $x \in D$. Si $f_n \xrightarrow{\rightarrow} f$ y $x_n \rightarrow x$, prueba que $f_n(x_n) \rightarrow f(x)$.

12. Consideremos el ejercicio 12.6 y sea $\mathcal{F}$ una colección de funciones continuas $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Si $\mathcal{F}$ es uniformemente acotada, prueba que $T(\mathcal{F}) \equiv \{Tf : f \in \mathcal{F}\}$ es una familia equicontinua.

Para revisar y entregarse el martes 27 de mayo, 2008.