ANALISIS II: TAREA 14

1. Sean $A \subset \mathbb{R}^M, B \subset \mathbb{R}^N$. Si A y B son conexos, prueba que $A \times B$ también lo es. (Sug.: considera el ejercicio 13.3)

2. De acuerdo al ejercicio 13.6, la función $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ es una biyección. Sea $E : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ su función inversa y hagamos $e^x \equiv E(x), \ \forall\, x \in \mathbb{R}$. Prueba: a) $e^0 = 1$. b) $E'(x) = E(x), \ \forall\, x \in \mathbb{R}$. c) $e^{(x+y)} = e^x e^y, \ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$. d) $e^{-x} = e^{x-1}, \ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

3. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua por pedazos, prueba que $f \in R[a, b]$.

4. Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas. Si $g \geq 0$ y f es continua, prueba que existe $c \in [a, b]$ tal que $\int_a^b fg = f(c) \int_a^b g$.

5. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1. Encuentra la derivada de $g(y) \equiv \int_a^b f(x - 3y^2)\, dx, \ \forall\, y \in \mathbb{R}$. (Sug.: considera el ejercicio 13.9.)

6. Determina si el límite puntual de una sucesión de funciones acotadas es una función acotada.

7. Sea D un conjunto y $f_n, g_n : D \to \mathbb{R}^N$ funciones acotadas, $\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Si $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ convergen uniformemente, prueba que $\{f_n g_n\}$ también.

8. Sea $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto, $f, f_j : K \to \mathbb{R}^M, \ \forall\, j \in \mathbb{N}$. Si cada f_j es continua, $f_j \overrightarrow{\rightarrow} f$ y cada f_j tiene un cero en K, prueba que f también lo tiene.

9. Sea $f_n(x) \equiv x^n, \ 0 \leq x < 1, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Determina si $\{f_n\}$ es equicontinua.

10. Sea $K \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto compacto y $\mathcal{F} \subset F(K, \mathbb{R})$. Si $\mathcal{F}$ es equicontinua y puntualmente acotada, prueba que $\mathcal{F}$ es uniformemente acotada.

11. Sean $A \subset \mathbb{R}^M$ y $B \subset \mathbb{R}^N$ conjuntos compactos, y $f : A \times B \to \mathbb{R}$ continua. Sea $\mathcal{F} = \{f_y : y \in B\}$, donde $f_y(x) \equiv f(x, y), \ \forall\, x \in A$. Prueba que $\mathcal{F}$ es equicontinua.

12. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Si $\int_a^b f(x) x^n = 0, \ n = 0, 1, \ldots$, prueba que $f = 0$. (Sug.: verifica que la integral del producto de f con cualquier polinomio es 0 y utiliza el teorema de aproximación de Weierstrass para demostrar que $\int_a^b f^2 = 0$.)

Para revisar y entregarse el martes 3 de junio, 2008.

Tercer examen parcial: viernes 6 de junio, 12:30 hrs.